

~~o o o o o~~

$$\textcircled{1} F = \{ P(a,b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \} \quad \text{où } P(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P(1,0) \in F \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P(0,1) \in F$$

$$\textcircled{2} \text{ Est un sev de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ? \quad \bullet \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P(0,0) \in F$$

$$\bullet \text{ Je prends } A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ et } A' = \begin{pmatrix} a' & b' & b' \\ b' & a' & b' \\ b' & b' & a' \end{pmatrix} \in F$$

$$A + A' = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' & b+b' \\ b+b' & a+a' & b+b' \\ b+b' & b+b' & a+a' \end{pmatrix} = P(a+a', b+b') \in F$$

donc Est stable pour +

... Est stable pour \cdot

donc Est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

③ ~~$N^2 = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \dots$~~

$\mathcal{L}(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = aI_3 + bN$, donc $F = \{aI_3 + bN \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

$F = \text{Ker}(\mathbb{I}_3, N)$ *générateur*

Si $aI_3 + bN = 0$, alors $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $a = b = 0$

la famille (I_3, N) est liée

donc (I_3, N) est une base de F

$$N^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I + N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{(I, N)}$$

↑
coordonnées.

(4a) $2I + N = N^2 \Leftrightarrow N^2 - N = 2I \Leftrightarrow \frac{N^2 - N}{2} = I$

$$\Leftrightarrow N \left(\frac{N - I}{2} \right) = I$$

└ Inverse de N

$$N^{-1} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) \circ est-il valeurs propres de N ?

\circ val propre $\Leftrightarrow \exists \vec{u} \neq \vec{0} \mid f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda I) \neq \{ \vec{0} \} \Leftrightarrow f$ n'est pas injective \Leftrightarrow

$\Leftrightarrow f$ n'est pas bijective $\Leftrightarrow N$ n'est pas inversible

or N est inversible, donc 0 n'est pas valeur propre

⑤ N est symétrique, donc diagonalisable

$$\textcircled{6} \text{ (a)} \quad \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{matrix} L_1+L_2+L_3 \\ \hline \end{matrix} \begin{vmatrix} 2-x & 2-x & 2-x \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{matrix} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{matrix} \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 1 & -x-1 & 0 \\ 1 & 0 & -x-1 \end{vmatrix} = (2-x)(-x-1)(-x-1)$$

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} & \stackrel{\text{dét}}{=} -x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} \\
 & = -x(x^2 - 1) - 1(-x - 1) + (1 + x) \\
 & = -x^3 + x + x + 1 + 1 + x = \underline{-x^3 + 3x + 2} = P(x)
 \end{aligned}$$

$P(-1) = 1 - 3 + 2 = 0$ - 1 est racine. On peut fact par $X+1$

$$\begin{array}{r}
 -x^3 + 3x + 2 \quad | \quad X+1 \\
 \underline{-(x^3 + x^2)} \\
 x^2 + 3x + 2 \\
 \underline{-(x^2 + x)} \\
 2x + 2
 \end{array}$$

$-x^2 + x + 2 = -(x-2)(x+1)$

$$P(x) = -(x+1)^2(x-2)$$

(6c) D diagonal $\Leftrightarrow \exists P / N = P D P^{-1}$

→ ok ra double $\vec{u}, \vec{v} \in E_1$

$$D = P^{-1} N P$$

$\vec{w} \in E_2$

$$B' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{Mat}(f, B')$$

(7) $N^n = P(a_n, b_n)$

$n \text{ par}$ \swarrow
 $\exists a_n, b_n$

Reverse

• pour $n = \Phi$: $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$

Ok pour $n = 1$

Exercice : Je prends un $n \geq 1$. Je suppose que $N = \mathcal{L}(a_n, b_n)$

$$N^{n+1} = N \cdot N = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n & a_n + b_n & a_n + b_n \\ a_n + b_n & 2b_n & a_n + b_n \\ a_n + b_n & a_n + b_n & 2b_n \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{L}(2b_n, a_n + b_n) = \mathcal{L}(a_{n+1}, b_{n+1})$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(8) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = Q B Q^{-1}$ avec B diagonalisable

J'appelle $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . J'appelle g l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 tel que $A = \text{Mat}(g, B)$

$$\begin{vmatrix} -x & 2 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x(1-x) - 2 = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) \quad \forall 1) \quad \boxed{B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Calcul $E_2 = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / g(\vec{u}) = 2\vec{u} \right\}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 2x \\ x+y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E_{-1} = \left\{ \vec{v} / g(\vec{v}) = -\vec{v} \right\}$

$$\begin{cases} 2y = -x \\ x+y = -y \end{cases} \Leftrightarrow x+2y=0$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B' = (\vec{u}, \vec{v}) \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = (\underbrace{Q B Q^{-1}})^n = \underbrace{Q B Q^{-1}} \underbrace{Q B Q^{-1}} \dots \underbrace{Q B Q^{-1}} \\ = Q B^n Q^{-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad A^n = Q B^n Q^{-1} \\ = \dots$$

(10) $N^n = \mathcal{L}(a_n, b_n)$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \tilde{A}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SERIES DE FOURIER

I Coefficients de Fourier

def: f est continue par morceaux sur l'intervalle $[0, T]$ lorsque
il existe $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ tels que $a_0 = 0, a_n = T$ et

f est continue sur tous les $]a_i; a_{i+1}[$

On calcule les coeffis de Fourier lorsque f est T -périodique et continue par

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

continue par morceaux sur $[0, T]$

On intègre sur un intervalle de longueur T

notion : $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ — valeur moyenne de f .

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$\text{où } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

↑
pulsation

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

Cas particulière : période 2π : $\omega = 1$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

Cas particuliers où f est paire:

$f \times \sin$ est impaire
 $f \times \cos$ est paire

$$\forall n \geq 1, b_n = 0 \text{ et } a_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

Cas particuliers où f est impaire : $f \times \cos$ est impaire et $f \times \sin$ est paire

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0 \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

II La série de Fourier

f est continue par morceaux et T -périodique

def: La série de Fourier de f est

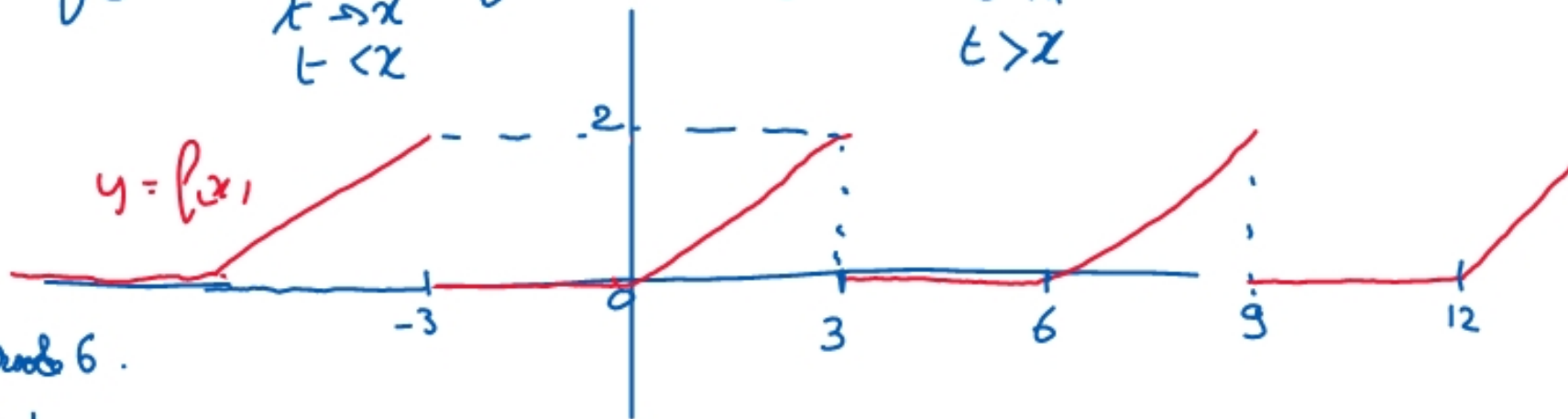
$$S_F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

Les a_n et b_n s'appellent les harmoniques.

Théorème de Dirichlet. Si f est T -périodique et de classe C^1 par morceaux, alors la série de Fourier converge ponctuellement $x \in \mathbb{R}$ vers $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$
 (valeur moyenne)

où $f(x^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t < x}} f(t)$ et $f(x^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t > x}} f(t)$

ex :



f est de période 6.
 et de classe C^1 par morceaux

en $x=0$

$$S_f(0) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n \cdot 0) + b_n \sin(n \cdot 0)) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$$

en $x=3$

$$S_f(3) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n \omega \cdot 3) + b_n \sin(n \omega \cdot 3)) = \frac{2+0}{2} = 1$$