

u

$$\begin{aligned}
 (6) \quad u_n &= \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right) - 1 \\
 &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 = \cos\left(\frac{\pi}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 \quad (\text{ca } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x)
 \end{aligned}$$

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^4}\right) - 1 = -\frac{\pi^2}{32n^4} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \sim -\frac{\pi^2}{32n^4}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \text{ CV (Riemann)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\pi^2}{32n^4} \text{ CV} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ CV (VD, N)}$$

$$(22) \quad u_n = \frac{n^n}{n! (e+1)^n} \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)! (e+1)^{n+1}}}{\frac{n^n}{n! (e+1)^n}} = \frac{(n+1)^{n+1} n! (e+1)^n}{n^n (n+1)! (e+1)^{n+1}}$$

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{(e+1)^n}{(e+1)^{n+1}} = \frac{1}{e+1} \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n (n+1) (e+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n (e+1)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{e+1}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{1}{e+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \frac{1}{e+1} \quad ? \quad \text{F. I} \\
 &= e^{n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)} \frac{1}{e+1} = e^{n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \frac{1}{e+1} = \frac{e^{n \left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]}}{e+1} = \frac{e^{1+o(1)}}{e+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{e+1}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{e}{e+1} < 1, \text{ donc } \sum u_n \text{ CV (D'Alembert)}$$

$$v_n = \frac{n^n}{n! (e-1)^n} \quad \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| \rightarrow \frac{e}{e-1} > 1, \text{ donc } \sum v_n \text{ Div (D'Alembert)}$$

$$\textcircled{2} \quad f: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x] \quad f \text{ va de } \mathbb{R}_3[x] \text{ dans } \mathbb{R}_3[x]. \quad \left(\begin{array}{l} \deg P \leq 2 \\ \Rightarrow \deg XP' \leq 3 \end{array} \right)$$

$$P \mapsto XP' - 2P$$

On prend P et $Q \in \mathbb{R}_3[x]$ et a et $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(aP + bQ) &= X(aP + bQ)' - 2(aP + bQ) \\ &= X(aP' + bQ') - 2aP - 2bQ \\ &= a[XP' - 2P] + b[XQ' - 2Q] \\ &= a f(P) + b f(Q) \quad \text{donc } f \text{ est linéaire} \end{aligned}$$

donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$

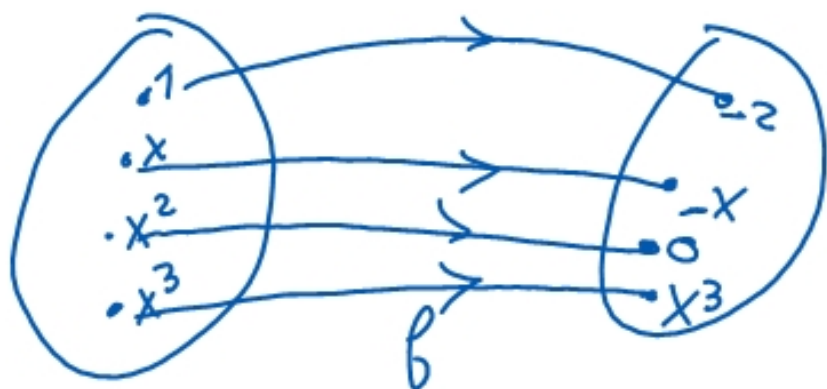
$$P \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow XP' - 2P = 0 \quad P = A e^{-\int \frac{2}{x}}$$

$$P = A e^{\int \frac{2}{x}} = A e^{2 \ln x} = A e^{\ln(x^2)} = A x^2 \quad \text{Ker}(f) = \{A x^2 \text{ où } A \in \mathbb{R}\}$$

$\text{Ker}(f) \neq \{0\}$, donc f n'est pas injective $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(x^2)$

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_3[x])$$

$$1 + 3 = 4$$



$$f(1) = X \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$$

$$f(x) = X \cdot 1 - 2x = -x$$

$$f(x^2) = X \cdot 2x - 2 \cdot x^2 = 0$$

$$f(x^3) = X \cdot 3x^2 - 2x^3 = x^3$$

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(-2, -x, x^3)$$

f n'est pas surjective car $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}_3[x]$

$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$

$$f(1) = -2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad f(x) = -x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad f(x^2) = 0 \quad f(x^3) = x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{2\sin^2 x + 7\cos x - 8} dx$$

On remplace x par $-x$

$$-\sin(-x) = \sin x$$

$$\frac{\sin(-x)}{2\sin^2(-x) + 7\cos(-x) - 8} d(-x) = \frac{\sin x}{2\sin^2 x + 7\cos x - 8} dx$$

qd $x=0$: $X = \cos(0) = 1$

qd $x = \frac{\pi}{2}$, $X = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

chgt $X = \cos x$

$$I = \int_1^0 \frac{\cancel{\sin x}}{2\sin^2 x + 7X - 8} \frac{-dX}{\cancel{\sin x}}$$

$$\frac{dX}{dx} = -\sin x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{-dX}{\sin x}$$

$$\sin^2 + \cos^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 = 1 - \cos^2 = 1 - X^2$$

$$I = - \int_1^0 \frac{1}{2(1-X^2) + 7X - 8} dX = \int_0^1 \frac{1}{-2X^2 + 7X - 6} dX$$

$$\Delta = 49 - 48 = 1 \quad X = \frac{-7 \pm 1}{-4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\underline{-2X^2 + 7X - 6} = \underline{-2(X-2)(X-\frac{3}{2})} = (X-2)(-2X+3)$$

$$\frac{1}{(x-2)(-2x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{-2x+3}$$

$$a = \frac{1}{-2x+3} \Big|_{x=2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$b = \frac{1}{x-2} \Big|_{x=\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}-2} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$I = \int_0^1 \frac{-1}{x-2} dx + \int_0^1 \frac{-2}{-2x+3} dx$$

$$= - \left[\ln|x-2| \right]_0^1 + \left[\ln|-2x+3| \right]_0^1$$

$$= - \ln 1 + \ln 2 + \ln 1 - \ln 3$$

$$\underline{I = \ln 2 - \ln 3}$$

SÉRIES ENTIÈRES

① Rayon

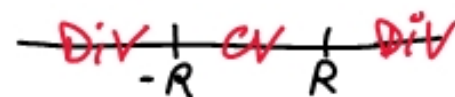
def : Une série Entière est une série de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = S(x)$

où $a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

ex : $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in]-1; 1[$

⌈1.⌋ toute Série Entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ CV sur $] -R, R[$ où $\begin{cases} R \in \mathbb{R}^+ \\ \text{ou} \\ R = +\infty \end{cases}$

et $S(x)$ Div qd $x > R$ et $x < -R$



ex : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{2^n} \right)$. Quel est son rayon ?

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{|x|^n}{2^n}} = \frac{|x|^{n+1}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{|x|^n} = \frac{|x|}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{2}$$

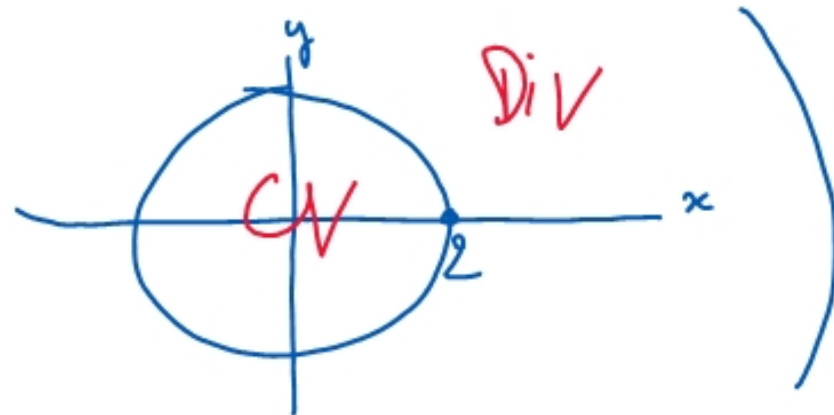
si $\frac{|x|}{2} < 1$, alors $\sum a_n$ CV $|x| < 2$
 si $\frac{|x|}{2} > 1$, alors $\sum a_n$ DIV $|x| > 2$

Div | CV | CV | Div | $\sum_0^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$ CV sur $]-2; 2[$

le rayon de la S.E $\sum_0^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$ vaut $R=2$

(on peut travailler dans \mathbb{C} :

$S(z) = \sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{2^n}$ / CV qd $|z| < 2$
 / DIV qd $|z| > 2$



ex2 : $S(x) = \sum_0^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)$

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|^{n+1} \cdot n!}{|x|^n \cdot (n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

donc $\sum_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ CV, $\forall x \in \mathbb{R}$ On dit que son rayon est infini

$R = +\infty$

en fait, $\sum_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

on dit que le Développement en Série Entière de e^x est $\sum_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

ex3 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = S(x) = 0 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = -\ln(1-x)$
 rayon 1. en effet:

$$\left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x|^n} = \frac{n|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$$

Si $|x| < 1$, alors $\sum C_n CV$) Rayon 1
 Si $|x| > 1$, alors $\sum C_n DIV$

$$S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ DIV (Arenum)}$$

$$S(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} CV \text{ (C.S.A.)}$$



ex 4: $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2 + 2n - 1)x^n}{3^n + 2^n} = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$

T ds v : Si $|a_n| \sim b_n$, alors $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont même rayon

$$\left| \frac{n^2 + 2n - 1}{3^n + 2^n} \right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{3^n} = b_n \quad \cdot \quad S_2(x) = \sum_0^{+\infty} \frac{n^2}{3^n} x^n = \sum_0^{+\infty} b_n x^n$$

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} |x|^{n+1}}{\frac{n^2}{3^n} |x|^n} = \frac{(n+1)^2 3^n |x|^{n+1}}{n^2 3^{n+1} |x|^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{|x|}{3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{3}$$

Si $\frac{|x|}{3} < 1$, alors $\sum c_n$ CV $|x| < 3$
 Si $\frac{|x|}{3} > 1$, alors $\sum c_n$ Div $|x| > 3$

D'Alembert

$R = 3$

II Les Gros théorèmes

T₁ continuité : toute Série Entière est continue là où elle converge

donc au moins sur $] -R, R[$

T₂ dérivabilité : toute Série Entière est de classe C^∞ sur $] -R, R[$
de rayon R

tout
va
bien
pour les
S. E.

de plus

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

T₃ Intégration :

On peut intégrer une S. E. de rayon R à l'intérieur de $] -R, R[$

$$\text{Si } [0, b] \subset] -R, R[, \text{ alors } \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b$$

