

résumé coll

① def de la matrice de g dans la base \mathcal{B}

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \text{coord de } g(\vec{u}) & g(\vec{v}) & g(\vec{w}) \\ g(\vec{u}) & \text{dans } \mathcal{B} & \text{dans } \mathcal{B} \\ \text{dans } \mathcal{B} & \text{dans } \mathcal{B} & \text{dans } \mathcal{B} \end{pmatrix} \quad \text{ou } \mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

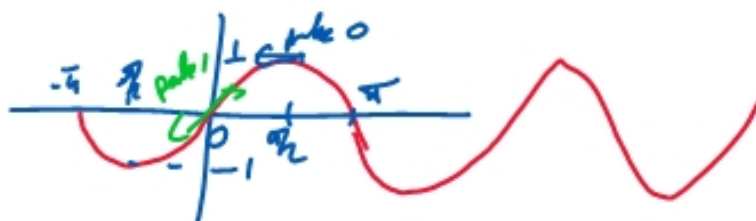
② DL de $\sin x$ à l'ordre 3

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

③ DL de $\cos x$ à l'ordre 4

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4)$$

④ Dessin de $\sin x$



⑤ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$$(2) \quad u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \quad v_n = \frac{u_n - i}{u_n + i} \quad v_{n+1} \text{ en fonction de } u_n$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{u_n - 1}{u_n + 1} - i}{\frac{u_n - 1}{u_n + 1} + i} = \frac{\frac{u_n - 1}{u_n + 1} - i}{\frac{u_n - 1}{u_n + 1} + i} \times \frac{(u_n + 1)}{(u_n + 1)} = \frac{u_n - 1 - i(u_n + 1)}{u_n - 1 + i(u_n + 1)}$$

$$(4) \quad a_n = \frac{(-1)^p}{\pi(2p+1)} - \frac{(-1)^p}{\pi(2p-1)} = \frac{(-1)^p(2p-1) - (-1)^p(2p+1)}{\pi(2p+1)(2p-1)}$$

$$a_n = \frac{\cancel{(-1)^p 2p} - (-1)^p - \cancel{(-1)^p 2p} - (-1)^p}{\pi(4p^2 - 1)} = \frac{-2(-1)^p}{\pi(4p^2 - 1)} = \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2 - 1)}$$

$$(6) \quad S = \frac{1}{980} \quad T = \frac{1}{16}T + S \Rightarrow T - \frac{1}{16}T = S \Rightarrow \frac{15}{16}T = S$$

$$\Rightarrow T =$$

$$\textcircled{6} \quad V = \frac{\pi^4}{96} \quad U = \frac{1}{16} U + V \Rightarrow U - \frac{1}{16} U = V \Rightarrow \frac{15}{16} U = V$$

$$\Rightarrow U = \frac{16}{15} V = \frac{16}{15} \frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\textcircled{8} \quad \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y}{(1+y^2)(1+xy)} = \frac{x(1+y^2) + y(1+x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)}$$

$$= \frac{x + xy^2 + y + yx^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} = \frac{x+y + xy(y+x)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)}$$

$$= \frac{(x+y)(\cancel{1+xy})}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)}$$

$$(10) \quad y(\theta) = \cos(\theta) \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$y'(\theta) = -\sin\theta \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\theta \left(1 + \tan^2\frac{\theta}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$t = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$= -\frac{2t}{1+t^2} t + \frac{1-t^2}{1+t^2} (1+t^2) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-4t^2 + (1-t^2)(1+t^2)}{(1+t^2) \cdot 2} = \frac{-4t^2 + 1 - t^4}{2(1+t^2)}$$

III Séries Alternées

def: la série $\sum u_n$ est alternée lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \cdot u_{n+1} < 0$

(si $u_0 > 0$, alors $u_1 < 0$, $u_2 > 0$, ...)
(si $u_0 < 0$, alors $u_1 > 0$, $u_2 < 0$, ...)

def: la série $\sum u_n$ est semi-convergente lorsque $\begin{cases} \sum u_n \text{ CV} \\ \sum |u_n| \text{ DIV} \end{cases}$

ex: La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \sum \frac{1}{n} \text{ DIV (Riemann)}$

• Montrons que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ CV}$ c-à-d $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n}$ existe et est finie

$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n}$. On montre que les suites $(S_{2N})_{N \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes

$$\bullet \quad \underline{S_{2N+1} - S_{2N}} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{2N+1}}{2N+1} = \frac{-1}{2N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

• Montrons que la suite $(S_{2N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante:

$$\begin{aligned} u_{N+1} - u_N &= S_{2N+3} - S_{2N+1} = \sum_{n=1}^{2N+3} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{2N+2}}{2N+2} + \frac{(-1)^{2N+3}}{2N+3} \\ &= \frac{1}{2N+2} - \frac{1}{2N+3} = \frac{2N+3 - (2N+2)}{(2N+2)(2N+3)} = \frac{1}{(2N+2)(2N+3)} > 0 \end{aligned}$$

la suite $(S_{2N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante

$$\begin{aligned} \bullet \quad S_{2N+2} - S_{2N} &= \sum_{n=1}^{2N+2} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{2N+1}}{2N+1} + \frac{(-1)^{2N+2}}{2N+2} \\ &= \frac{-1}{2N+1} + \frac{1}{2N+2} = \frac{-2N-2 + 2N+1}{(2N+1)(2N+2)} = \frac{-1}{(2N+1)(2N+2)} < 0 \end{aligned}$$

donc $\underline{(S_{2N})_{N \in \mathbb{N}}$ est décroissante

Donc les suites $(S_{2N})_{N \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc elles CV
on appelle S leur limite.

IT Critère des Séries Alternées

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} \sum u_n \text{ est une Série Alternée} \\ |u_n| \text{ est décroissante (à partir d'un certain rang)} \\ |u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{array} \right. \text{ alors } \sum u_n \text{ CV}$$

(CSA)

ex1: $\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est alternée ; $|\frac{(-1)^n}{n}| = \frac{1}{n}$ est décroissante et tend vers 0
donc $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ CV

ex2 $\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$ ($a > 0$) est alternée et $|\frac{(-1)^n}{n^a}| = \frac{1}{n^a}$ est décroissant et $\rightarrow 0$
donc $\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$ CV

IT Critère des Séries Alternées, pratique :

$$\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^a} \text{ CV pour } a > 0$$

(CSA)

exi. Donner la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{2/3} + (-1)^n}$, pour $n \geq 2$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{2/3} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{2/3}}\right)} \quad \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{DL de } \frac{1}{1+X} = 1 - X + \mathcal{O}(X)$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{2/3}}}_{U_n} - \underbrace{\frac{1}{n^{4/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)}_{W_n}$$

• $\sum U_n$ CV (CSA)

• $W_n \sim_{+\infty} -\frac{1}{n^{4/3}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ CV (Riemann) \rightarrow $\sum W_n$ CV (\forall des N)

donc $\sum u_n$ CV (CV + CV = CV)

ex2: $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

$$u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{v_n} - \underbrace{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{w_n}$$

Nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$?

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

• $\sum v_n$ CV (CSA)

• $w_n \sim -\frac{1}{2n}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ Div (Riemann) $\Rightarrow \sum -\frac{1}{2n}$ Div $(x - \frac{1}{2})$

$\Rightarrow \sum \underline{w_n}$ Div

$\sum u_n$ Div (CV + Div = Div)

ex 3 : Nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{OK} \quad \cdot \quad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ CV } \quad \text{(CSA)} \Rightarrow \sum u_n \text{ CV } \quad (\text{Fda, } \sim)$$

pas de T des \sim avec les $(-1)^n$

$$u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{v_n} - \underbrace{\frac{(-1)^n}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{w_n} \quad \cdot \quad \sum v_n \text{ CV } \quad \text{(CSA)}$$

$$\cdot \quad |w_n| \sim \frac{1}{6n^{3/2}}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ CV (Riemann)} \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{6n^{3/2}} \text{ CV} \Rightarrow \sum |w_n| \text{ CV } \quad (\text{Fda, } \sim)$$

$$\Rightarrow \sum \underbrace{w_n}_{\text{CV}} \text{ CV } \quad (\text{CVA} \Rightarrow \text{CV}) \quad \text{donc} \quad \sum \underbrace{u_n}_{\text{CV}} \text{ CV } \quad (\text{CV} + \text{CV} = \text{CV})$$

IT

Si $\left. \begin{array}{l} \sum u_n \text{ est alternée} \\ |u_n| \text{ est décroissante et tend vers } 0 \text{ (qd } n \rightarrow +\infty) \end{array} \right\}$

Alors $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est du signe du premier terme u_{n_0}

$$S = \sum_{n=n_0}^N u_n + \sum_{N+1}^{+\infty} u_n = S_N + R_N$$

R_N est du signe du premier terme u_{N+1}

$$|R_N| \leq |u_{N+1}|$$

S est comprise entre 2 sommes partielles consécutives
(S est entre S_N et S_{N+1})