

ceci

$$\textcircled{4} \quad \Psi \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ P(x) \mapsto xP'(x) - 2P(x) \end{array} \right. \cdot \underline{\Psi \text{ va de } \mathbb{R}_3[x] \text{ dans } \mathbb{R}_3[x]} \\ (\deg(P') \leq 2 \Rightarrow \deg(xP' - 2P) \leq 3)$$

• Soit P et $Q \in \mathbb{R}_3[x]$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \Psi(aP + bQ)(x) &= x(aP + bQ)'(x) - 2(aP + bQ) \\ &= x(aP' + bQ') - 2aP - 2bQ \\ &= a(xP' - 2P) + b(xQ' - 2Q) \\ &= a \Psi(P) + b \Psi(Q) \end{aligned}$$

donc Ψ est linéaire

donc Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$

$$p \in \ker(\psi) \Leftrightarrow \psi(p) = 0 \Leftrightarrow xp'(x) - 2p(x) = 0$$

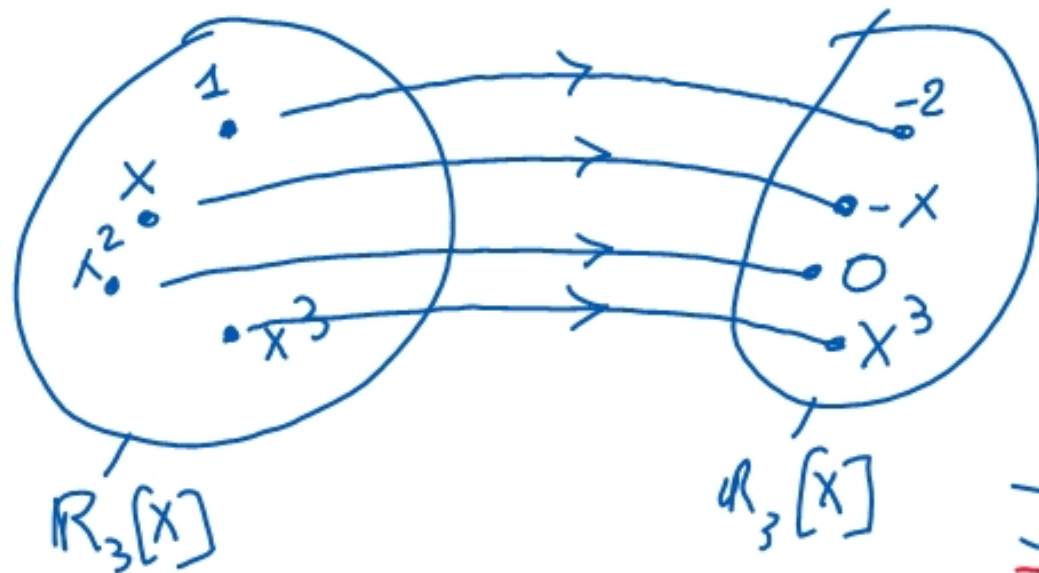
$$p = A e^{\int \frac{2}{x} dx} = A e^{2 \ln(x)} = A e^{\ln(x^2)} = A x^2$$

$$\ker(\psi) = \{Ax^2 \text{ ou } A \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x^2) \quad \dim(\ker(\psi)) = 1$$

ψ n'est pas injective car $\ker(\psi) \neq \{0\}$

$$\dim(\ker(\psi)) + \dim(\text{Im}(\psi)) = \dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4$$

$$\dim(\text{Im}(\psi)) = 3$$



$$\psi(1) = x \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$$

$$\psi(x) = x \cdot 1 - 2x = -x$$

$$\psi(x^2) = 0$$

$$\psi(x^3) = x \cdot 3x^2 - 2x^3 = x^3$$

$$\text{Im}(\psi) = \text{Vect}(-2; -x; x^3) \quad \text{base}$$

3] DiV + DiV ??

ex $S_1 = \sum \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \right) \text{DiV}$ (exemple précédent)

$$S_2 = \sum \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \right) \text{DiV} \quad (\text{CV} + \text{DiV} = \text{DiV})$$

$$S_1 + S_2 = \sum 2 \cdot \frac{1}{2^n} \text{CV} \quad (\text{Série Géométrique de raison } \frac{1}{2})$$

4]

Si $\sum_0^{+\infty} u_n \text{CV}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$



Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, alors $\sum_0^{+\infty} u_n \text{DiV}$

⚠ c'est faux dans l'autre sens

ex: Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \sin(n)$?

u_n n'a pas de limite en $+\infty$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n) \text{DiV}$

ex: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ CV et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ DIV (Riemann)

$$\frac{1}{n^2} \xrightarrow{+\infty} 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{+\infty} 0$$

15] Théorème de comparaison.

Si $\underline{0} \leq a_n \leq b_n$ alors

$$\sum b_n \text{ CV} \Rightarrow \sum a_n \text{ CV}$$

$$\sum a_n \text{ DIV} \Rightarrow \sum b_n \text{ DIV}$$

16] \forall des équivalents

Si $\underline{0} \leq a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ alors

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ont
 \tilde{m} nature

$\left[\frac{b_n}{a_n} \xrightarrow{+\infty} 1 \right]$. Soit n assez grand ($n \geq N$), $\frac{1}{2} \leq \frac{b_n}{a_n} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} a_n \leq b_n \leq 2 a_n$

$$\text{Si } \sum_1^{+\infty} b_n \text{ CV, alors } \sum_1^{+\infty} \frac{1}{2} a_n \text{ CV (T de comparaison)}$$

$$\Rightarrow \sum_1^{+\infty} a_n \text{ CV (on multiplie par 2)}$$

$$\text{Si } \sum_1^{+\infty} b_n \text{ DIV alors } \sum_1^{+\infty} 2a_n \text{ DIV (T de comparaison)}$$

$$\Rightarrow \sum_1^{+\infty} a_n \text{ DIV}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Si } \sum_1^{+\infty} a_n \text{ CV alors, } \sum 2a_n \text{ CV} \\ \Rightarrow \sum b_n \text{ CV (T de comparaison)} \\ \\ \text{Si } \sum_1^{+\infty} a_n \text{ DIV, alors } \sum \frac{1}{2} a_n \text{ DIV} \\ \Rightarrow \sum b_n \text{ DIV (T de comparaison)} \end{array} \right) \quad \square$$

ex1: $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ Nature de $\sum u_n$?

$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+00}{\sim} \frac{1}{n^2} \quad \text{Car } \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ CV (Riemann: } \varepsilon > 1) \quad \text{donc } \underline{\sum_1^{+\infty} u_n \text{ CV}} \quad (\text{T des } \sim)$$

ex2: $u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ Nature de la série $\sum u_n$?

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+00}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \sum_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ DIV (Riemann: } \frac{1}{2} < 1) \Rightarrow \underline{\sum_1^{+\infty} u_n \text{ DIV}} \quad (\text{T des } \sim)$$

ex3: $u_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n}$ Nature de $\sum u_n$?

$$u_n \underset{+00}{\sim} \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n \quad \sum_0^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n \text{ CV (série géométrique de raison } \frac{3}{5} \in]-1, 1[)$$

$$\Rightarrow \underline{\sum u_n \text{ CV}} \quad (\text{T des } \sim)$$

ex 4: $u_n = \frac{2^n + (-3)^n}{5^n}$ Nature de $\sum u_n$?

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-3)^n}{5^n} = \left(\frac{-3}{5}\right)^n.$$

$\sum \left(\frac{-3}{5}\right)^n$ CV (série géométrique de raison $-\frac{3}{5} \in]-1, 1[$)

donc ~~$\sum u_n$ CV (T des \mathcal{N})~~

Ici, on ne peut pas utiliser
le T des \mathcal{N} car $\left(\frac{-3}{5}\right)^n$ change de
signe.

On verra bientôt

ex 5 $u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} \quad \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ CV (Riemann; } p > 1) \Rightarrow \sum_1^{+\infty} \frac{1}{2n^2} \text{ CV}$$

$$\Rightarrow \sum u_n \text{ CV (T des } \mathcal{N}),$$

$$\text{ex 6: } u_n = \frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}{1 - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

$$u_n = \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{+0}{\sim} \frac{\frac{1}{2n^3}}{\frac{1}{2n^2}} = \frac{1}{n}$$

$$\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ Diverge (Riemann), } \Rightarrow \underline{\sum u_n \text{ Diverge}} \quad (\forall \text{ det } \nu)$$

7] Convergence Absolue

def: La série de terme général u_n converge absolument (CVA),
lorsque $\sum |u_n|$ CV

$$\boxed{\text{I] CVA} \Rightarrow \text{CV}}$$

$\sum_0^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ CV (série géométrique de
raison $\frac{3}{5} \in]-1, 1[$)

$$\text{ex 4 } u_n = \frac{2^n + (-3)^n}{5^n} \quad |u_n| \underset{+0}{\sim} \left|\left(\frac{-3}{5}\right)^n\right| = \left(\frac{3}{5}\right)^n \Rightarrow \sum |u_n| \text{ CV } (\forall \text{ det } \nu)$$

$$\Rightarrow \underline{\sum u_n \text{ CV}} \quad (\text{CVA} \Rightarrow \text{CV})$$

8 Règle de D'Alembert

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \text{ alors } \begin{cases} l < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ CVA, donc CV} \\ l > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ DiV} \\ l = 1 \Rightarrow \text{rien} \end{cases}$$

$a_n \neq 0$

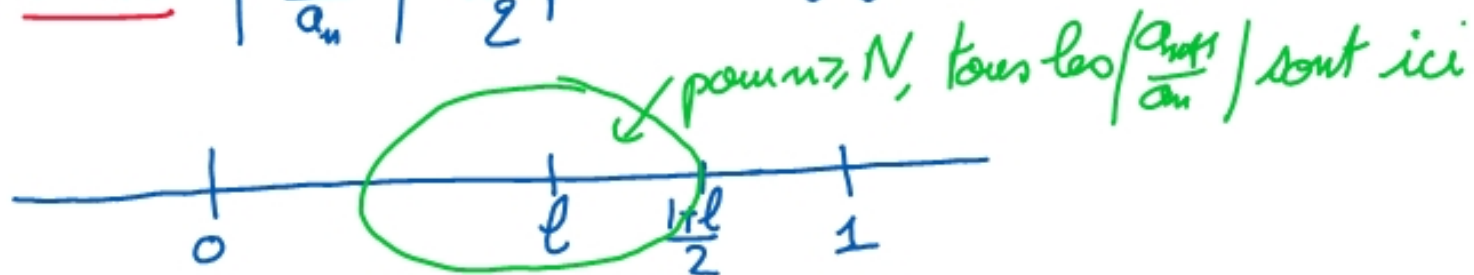
□. Si $l > 1$. $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ pour n assez grand ($n \geq N$)

$\Rightarrow |a_{n+1}| > |a_n| > 0$ pour $n \geq N$

$\forall n > N : |a_n| > |a_N|$. Donc la suite $(a_n)_{n \geq N}$ ne tend pas vers 0

Donc $\sum_0^{+\infty} a_n \text{ DiV}$ (critère u^0)

• Si $l < 1$ $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \frac{1+l}{2}$ pour n assez grand ($n \geq N$)



$$\forall n \geq N; 0 \leq \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < r = \frac{1+\epsilon}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N \quad |a_{n+1}| < r |a_n|$$

$$\Rightarrow \quad |a_{n+p}| < r^p |a_n|$$

$$\sum_{n=N}^{+\infty} |a_n| < \sum_{p=0}^{+\infty} r^p |a_N| = |a_N| \sum_{p=0}^{+\infty} r^p$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} r^p \text{ CV (Série Géométrique de raison } r \in]0, 1[)$$

$$\text{donc } \sum_{n=N}^{+\infty} |a_n| \text{ CV (T de comparaison)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \text{ CV} \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ CV (CVA} \rightarrow \text{CV)} \quad \square$$