

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \det(A - X I_3) = | \dots | = (1-X)^3$$

$\textcircled{2}$  Une seule val propre 1, de multiplicité 3

$\textcircled{3}$  Si  $A$  est diagonalisable: on a  $\mathcal{B}'$  dans laquelle  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 $= \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\text{Id})$   
 $= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}) = A$

contradiction.

Donc  $A$  n'est pas diagonalisable

On peut calculer  $E_1 = \{ \vec{u} \left( \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3 / \|\vec{u}\| = 1 \text{ et } A\vec{u} = \lambda \vec{u} \}$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = x \\ -x - y - z = -y \\ x + 2y + 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x + 2y + z = 0.$$

La dimension de l'espace propre pour la valeur propre  $\lambda$  est 2

Elle est  $\neq$  de la multiplicité de  $\lambda$ . Donc  $A$  n'est pas diagonalisable.

Le polynôme caractéristique est scindé, donc  $A$  est triangulisable.

$$f(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3$$

$$B = (e_1, e_2, e_3)$$

$$\text{Mat}_B(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$\textcircled{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ f(2e_1) & f(e_3 - f(e_1)) & \end{matrix}$$

pas de colonnes de 0, donc

$$\text{rang}(A) = 3$$

$$\dim(\text{Im}(f)) = 3$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Ker}(f)) = 0 \quad (\text{T du rang})$$

$f$  est surjective

$$\text{Ker}(f) = \{ \vec{0} \}$$

$f$  est injective

$$\textcircled{7} e_1 = (1, 0, -1)$$

$$e_2 = (1, -1, 1)$$

Alors  $(e_1, e_2)$  est une base de

$$F = \{ \vec{u} \mid f(\vec{u}) = \vec{u} \}$$

$F$  est le plan d'éq  $x + 2y + z = 0$

$$1 + 2 \cdot 0 - 1 = 0$$

$$\text{et } 1 + 2 \cdot (-1) + 1 = 0$$

$e_1$  et  $e_2$  sont 2 vecteurs  
linéaires du plan  $F$ .

C'est une base de  $F$ .

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{B}' = (e'_1; e'_2; e_1)$$

$$\text{Mat}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(e'_1) & \mathcal{P}(e'_2) & \mathcal{P}(e_1) \\ \mathcal{D}_{\mathcal{B}'} & \mathcal{D}_{\mathcal{B}'} & \mathcal{D}_{\mathcal{B}'} \end{pmatrix}$$

$$e_1 = (1, 0, 0)$$

$$e_2 = (1, 0, -1) \quad e'_2 = (1, -1, 1)$$

$$\mathcal{P}(e_1) = e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$\mathcal{P}(e_2) = e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$\boxed{\mathcal{P}(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3} = \boxed{a}e'_1 + \boxed{b}e'_2 + \boxed{c}e_1$$

$$= a e'_1 + b e'_2 + c e_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 2 \\ -b = -1 \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

$$b = 1 \text{ et } a = 0$$

$$c = 1$$

$$\mathcal{P}(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$\boxed{A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$A^2 = 2A - I$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}$$

ça marche.

$$A^2 = 2A - I$$

(2) M que A est inversible et que  $A^{-1} = 2I - A$

$$(2I - A) \cdot A = 2IA - A^2 = 2A - (2A - I) = I$$

donc A est inversible et  $A^{-1} = 2I - A$

$$\text{Si } \alpha I + \beta A = \alpha' I + \beta' A$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \alpha' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ -\beta \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' + 2\beta' \\ -\beta' \\ -\beta' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = \alpha' + 2\beta' \\ -\beta = -\beta' \end{cases} \Rightarrow \beta = \beta' \rightarrow \alpha = \alpha' \quad \text{fin}$$

$$\alpha = \alpha' \text{ et } \beta = \beta'$$

$$X_{n+1} = \frac{X_n^2}{n+1} + 2I - A \quad \text{et } X_0 = A$$

(4)  $X_n = \alpha_n I + \beta_n A$  par récurrence

(i) pour  $n=0$   $X_0 = 0 \cdot I + 1 \cdot A$  OK

(ii) Je prends un  $n \geq 0$ . Je suppose que  $X_n = \alpha_n I + \beta_n A$

$$X_{n+1} = \frac{(\alpha_n I + \beta_n A)^2}{n+1} + 2I - A = \frac{\alpha_n^2 \overset{I}{I^2} + 2\alpha_n \beta_n \overset{A}{I \cdot A} + \beta_n^2 \overset{A^2}{A^2}}{n+1} + 2I - A$$

$$X_{n+1} = \frac{\alpha_n^2 I + 2\alpha_n \beta_n A + \beta_n^2 A - \beta_n^2 I}{n+1} + 2I - A$$

$$= \left( \frac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 \right) I + \left( \frac{2\alpha_n \beta_n + \beta_n^2}{n+1} - 1 \right) A$$

$$= \alpha_{n+1} I + \beta_{n+1} A \quad \text{OK!}$$

Conclusion : . . .

Il semble que  $\alpha_n = n$  et  $\beta_n = 1$  par récurrence  
ou soit que  $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2$  et  $\beta_{n+1} = \frac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1$

(i) pour  $n=0$   $\alpha_0=0$  et  $\beta_0=1$  ok

(ii) Je prends un  $n \geq 0$ . Je suppose que  $\alpha_n = n$  et  $\beta_n = 1$

$$\alpha_{n+1} = \frac{n^2 - 1}{n+1} + 2 = \frac{(n+1)(n-1)}{n+1} + 2 = n-1+2 = n+1$$

$$\underline{\underline{\alpha_{n+1} = n+1}}$$

$$\beta_{n+1} = \frac{2 \cdot 1 \cdot (n+1)}{n+1} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\underline{\underline{\beta_{n+1} = 1}}$$

Conclusion :

# SÉRIES DE NOMBRES (réels ou complexes)

## I Séries de Riemann

def:  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n \quad (= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots)$

↑  
c'est ça qu'on appelle une série

(Une série, c'est la somme de tous les termes d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ )

ex 1:  $\sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2-1}$$

On dit que  $\sum_{n=0}^{+\infty} 1$  D.V. et que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$  C.V.



def. La série  $\sum_0^{+\infty} u_n$  converge (CV) lorsque  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_0^N u_n$  existe et est finie  
Sinon, elle Diverge (Div)

$\boxed{\text{T}_1}$

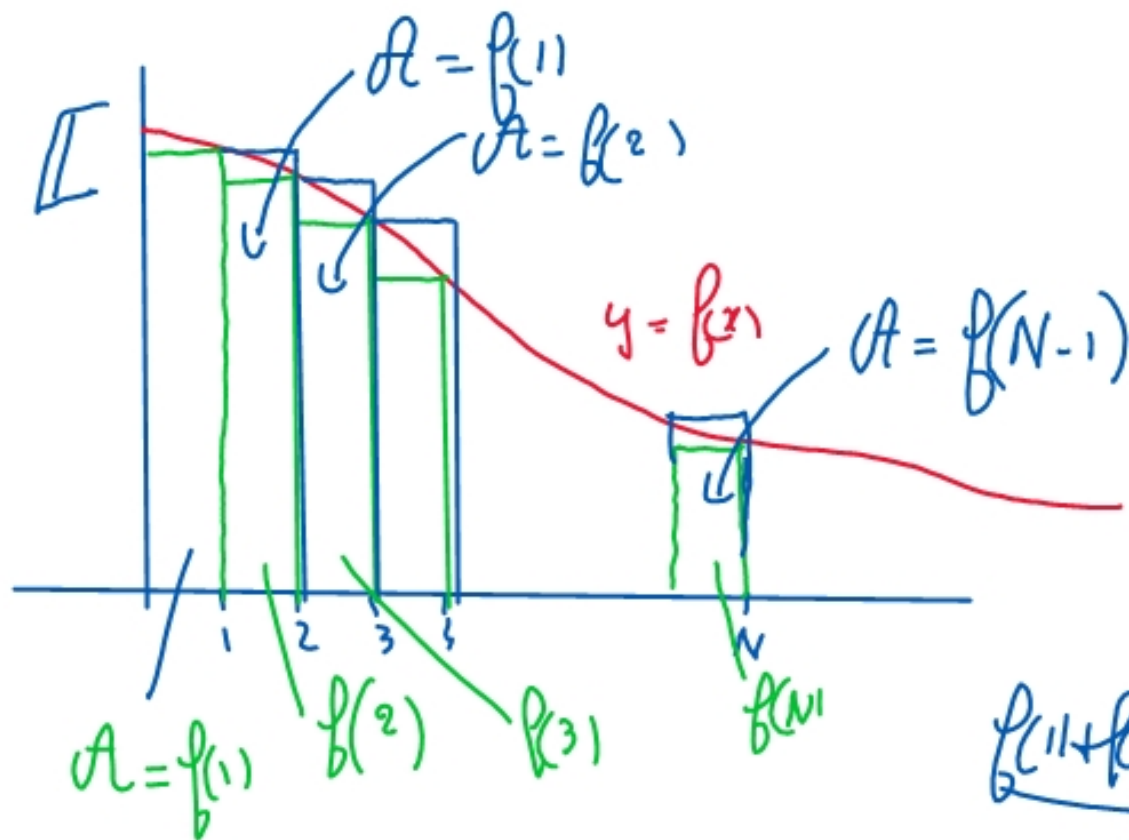
$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Rappel: Somme partielle d'une suite géométrique:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^N = \sum_0^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \quad \text{et comme } x \in ]-1, 1[, \quad x^{N+1} \rightarrow 0$$

T de comparaison Série - Intégrales Généralisées:

Si  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\left\{ \begin{array}{l} \text{positive} \\ \text{continue} \\ \text{décroissante} \end{array} \right.$ , alors  $\sum_0^{+\infty} f(n)$  et  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  ont  $\hat{=}$  même nature



$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(N) \leq \int_0^N f(x) dx$$

aire des rectangles verts
aire sous la courbe

Si  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  Div, alors  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  Div

Si  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  CV, vers  $l$ , alors  $u_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$  est une suite croissante et majorée, donc elle CV

$$\int_1^N f(x) dx \leq f(1) + f(2) + \dots + f(N-1)$$

Si  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  Div, alors  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  Div  
 Si  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  CV, alors  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  CV

Séries de Riemann :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} \quad \left| \begin{array}{l} \text{CV qd } a > 1 \\ \text{Div qd } a \leq 1 \end{array} \right.$$

$\square$   $f \mid [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$   $f$  est positive, décroissante et continue,  
 $x \mapsto \frac{1}{x^a}$  donc  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  et  $\sum_1^{+\infty} f(n)$  ont même nature

appel :  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{CV qd } a > 1 \\ \text{Div qd } a \leq 1 \end{array} \right.$   $\square$

$\triangle$  ne pas confondre  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^n}$

Séries de Riemann

séries géométriques

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

↑ Séries de Fourier

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \underbrace{\sum_{n=0}^N u_n}_{\text{somme partielle}} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n}_{\text{reste}}$$

## II Critères de convergence

$$\boxed{1} \quad CV + CV = CV \quad a \times CV = CV$$

(l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel)

ex:  $\sum_1^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2^n} \right) CV$

$CV \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} CV \text{ (Riemann, } a=2 > 1) \\ \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n} CV \text{ (Série géométrique de} \\ \text{raison } \frac{1}{2} \in ]-1, 1[) \end{array} \right.$

$CV + CV = CV$

$$\boxed{2} \quad CV + Div = Div \quad \text{ex: } \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} Div \text{ (Riemann, } a=1) \text{ et } \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n} CV \text{ donc } \sum_1^{\infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \right) Div$$