

① DL de $\sin x$ à l'ordre $2n+2$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

② $\binom{100}{2} = \frac{100!}{2! \cdot 98!} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \dots \cancel{98} \cdot 99 \cdot 100}{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \dots \cancel{98}} = 99 \times 50 = 4950$

③ $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ $\left(\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4} + \text{cte} \right)$

④ def de la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{E} $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ \text{dans} & \text{dans} & \text{dans} \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{B} \end{pmatrix}$ où $\mathcal{E} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

⑤ dérivées de $\tan(x)$

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\frac{1}{1+2n} + \frac{1}{1-2n} = \frac{1-2n + 1+2n}{(1+2n)(1-2n)} = \frac{2}{1-4n^2}$$

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 - 6x - 6y & x+y \\
 \hline
 -(x^3 + x^2y) & x^2 + y^2 - 6 \\
 \hline
 y^3 + xy^2 - 6x - 6y & \\
 -(xy^2 + y^3) & \\
 \hline
 -6x - 6y & \\
 -(-6x - 6y) & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$$a_p = \frac{2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

$$2(p+1)+1 = 2p+2+1 = 2p+3$$

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} = \frac{\frac{2^{2p+2} (p+1)!}{(2p+3)!} x^{2p+3}}{\frac{2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}} = \frac{2^{2p+2} (p+1)! x^{2p+3}}{2^p p! x^{2p+1} (2p+3)!}$$

2² p+1 x² 1 / ((2p+2)(2p+3))

$$= \frac{4 \cdot (p+1) x^2}{(2p+2)(2p+3)} = \frac{2 \cdot 2 (p+1) x^2}{2 (p+1) (2p+3)} = \frac{2 x^2}{2p+3}$$

$$S = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(p+1)^6} \quad T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \quad \text{K} = \frac{1}{6}$$

$$S = \frac{\pi^6}{960} \quad T = \frac{1}{16} T + S \Rightarrow T - \frac{1}{16} T = S$$

$$\Rightarrow \frac{15}{16} T = \frac{\pi^6}{960} \Rightarrow T = \frac{\pi^6}{960} \times \frac{16}{15} = \frac{\pi^6}{900}$$

$$\frac{960}{96} \left| \frac{16}{60} \right. \quad \times \frac{15}{60} \\ \hline 900$$

$$F(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{e-1} + e^{-t}$$

$$F(0) = \frac{1+1}{e-1} + 1 = \frac{2+e-1}{e-1} = \frac{e+1}{e-1}$$

$$F(1) = \frac{e^1 + e^{-1}}{e-1} + e^{-1}$$

$$e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$= \frac{e + \frac{1}{e}}{e-1} + \frac{1}{e} = \frac{e^2 + 1}{(e-1)e} + \frac{1}{e} = \frac{e^2 + 1 + e - 1}{(e-1)e} = \frac{e^2 + e}{(e-1)e} = \frac{e(e+1)}{(e-1)e}$$

25) Dans l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

ex: Montre que les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \mapsto \cos x$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \mapsto \sin x$; $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \mapsto \sin(2x)$

forment une famille libre

Si $af + bg + ch = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

on doit montrer que a, b, c sont nuls.

$$a \cos x + b \sin x + c \sin(2x) = 0, \quad \underline{\forall x \in \mathbb{R}}$$

pour $x = 0$:

$$\underline{a = 0}$$

pour $x = \frac{\pi}{2}$

$$\underline{b = 0}$$

$$\Rightarrow c \sin(2x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{pour } x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \underline{c = 0}$$

$a = b = c = 0$ Donc la famille (f, g, h) est libre

III Applications Linéaires

ex 1 : Montrer que $f: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ est linéaire. Noyau et Image?
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$ où \mathbb{R}' est la dérivée de \mathbb{R}

(rappel : $\mathbb{R}_3[X] = \{ \text{polynômes de degré } \leq 3 \}$ $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$)
Soit \mathbb{R} et \mathbb{Q} \mathbb{R} polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$. Soit a et $b \in \mathbb{R}$

$$f(a\mathbb{R} + b\mathbb{Q}) = (a\mathbb{R} + b\mathbb{Q})' = a\mathbb{R}' + b\mathbb{Q}' = a f(\mathbb{R}) + b f(\mathbb{Q})$$

donc f est linéaire

$$\mathbb{R} \in \ker(f) \iff f(\mathbb{R}) = 0 \iff \mathbb{R}' = 0 \iff \mathbb{R} = cte$$

$$\ker(f) = \text{Vect}(1) \quad \dim(\ker(f)) = 1$$

∇ des rang: $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$
1 3

$$\left. \begin{array}{l} \dim(\text{Im}(f)) = 3 \\ \text{Im}(f) \text{ est un sev de } \mathbb{R}_2[x] \end{array} \right) \Rightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[x]$$

car $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$

ex2: $f: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$
 $f: P(x) \mapsto P(x+1)$

(par exemple:
 $f(x^2 + 3x - 2) = (x+1)^2 + 3(x+1) - 2$
 $= x^2 + 5x + 2$)

Montrer que f est linéaire. Donner son noyau et son image

Je prends 2 polynômes P et $Q \in \mathbb{R}_2[x]$ et 2 scalaires a et b

$$f(aP + bQ)(x) = aP(x+1) + bQ(x+1) = a f(P) + b f(Q)$$

f est linéaire. C'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$

$$P \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow P(x+1) = 0 \Leftrightarrow a(x+1)^2 + b(x+1) + c = 0$$

$$\Rightarrow ax^2 + (2a+b)x + a+b+c = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ ax+b=0 \\ ax+b+c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=b=c=0$$

$$\text{Ker}(\beta) = \{0\}$$

$$\text{et } \text{Im}(\beta) = \mathbb{R}_2[X]$$

Quelle est sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$?

$$\mathcal{B} = (1, X, X^2)$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} \beta(1) & \beta(X) & \beta(X^2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{B} \end{pmatrix}$$

$$\beta(1) = 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta(X) = X+1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta(X^2) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ex 3: $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} A$$

Il s'agit d'être linéaire

Je prends 2 matrices A et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et 2 scalaires a et $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(aA + bB) &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} (aA + bB) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} aA + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} bB \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} A + b \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} B \\ &= a f(A) + b f(B) \end{aligned}$$

donc f est linéaire

Noyau de f : $A \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(A) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2: 5b = 0 \quad b = 0 \quad a = 0$$

$$f(A) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 4b = 0 \\ 2a + 3b = 0 \\ c + 4d = 0 \\ 2c + 3d = 0 \end{cases}$$

$$c = d = 0$$

$\text{Ker}(f) = \{0\}$

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$$

$\underset{0}{\phantom{\dim(\text{Ker}(f))}} \quad \quad \quad \underset{4}{\phantom{\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))}}$

$$\left. \begin{array}{l} \dim(\text{Im}(f)) = 4 \\ \text{Im}(f) \text{ est un ser de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Im}(f) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

ex 4: $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $g \mapsto (g(0), g(\pi))$

où \mathcal{F} désigne l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

- ① Montrer que f est linéaire
- ② Trouver une fonction γ qui est dans le ^{noyau de f} $\text{Ker}(f)$

① Je prends 2 fonctions g et h et 2 scalaires a et b

$$f(ag + bh) = ((ag + bh)(0), (ag + bh)(\pi)) = (ag(0) + bh(0), ag(\pi) + bh(\pi))$$

$$= (ag(0), ag(\pi)) + (bh(0), bh(\pi)) = a(g(0), g(\pi)) + b(h(0), h(\pi))$$

② $f(\sin) = (\sin(0), \sin(\pi)) = (0, 0)$
 $\sin \in \text{Ker}(f)$ $= a f(g) + b f(h)$. Donc fonction linéaire