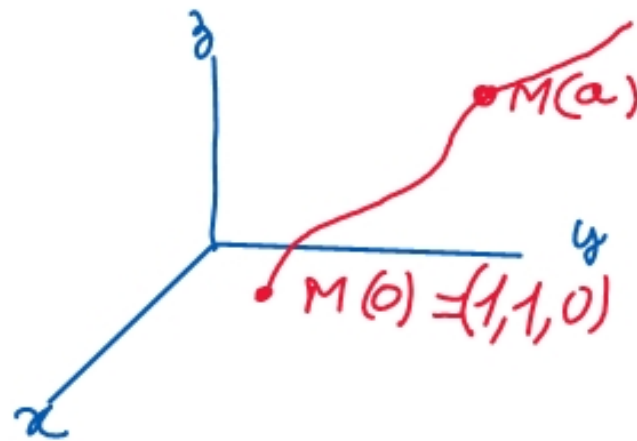


④ longueur de $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = t\sqrt{2} \end{cases}$



$$L = \int_{t=0}^{t=a} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= e^t \\ y'(t) &= -e^{-t} \\ z'(t) &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$L = \int_0^a \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} dt = \int_0^a \sqrt{e^{2t} + 2 + e^{-2t}} dt = \int_0^a \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} dt$$

$$L = \int_0^a (e^t + e^{-t}) dt = [e^t - e^{-t}]_0^a = e^a - e^{-a} - (1 - 1) = e^a - e^{-a} = 2\sinh(a)$$

Espace Vectoriel - Cas général

I Les gros espaces vectoriels

- les \mathbb{R}^n sont des esp vectoriels de dimension n
- les \mathbb{C}^n
- L'ensemble des suites à coefficients dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C})
- L'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[x]$ ou $\mathbb{C}[x]$
- L'ensemble des matrices $M_{pq}(\mathbb{R})$ est de dimension pq
- L'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}
- L'ensemble des applications linéaires $L(E, F)$

Ils sont stables pour $+$, \cdot et contiennent 0 .

II les sous-espaces vectoriels (s.e.v.)

def: Ce sont les sous-ensembles des gros espaces vectoriels qui contiennent 0 et qui sont stable pour + et pour \cdot (multiplication par un scalaire)

21 les sev de \mathbb{R}^n

rappel: les sev de \mathbb{R}^2 sont

$\{\vec{0}\}$	de dimension 0
les droites	de <u> </u> 1
\mathbb{R}^2	d <u> </u> 2

les sev de \mathbb{R}^3 sont

$\{\vec{0}\}$	dim 0
les droites	dim 1
les plans	dim 2
\mathbb{R}^3	dim 3

les sev de \mathbb{R}^n

$\{\vec{0}\}$	dim 0
les droites	dim 1
les plans	dim 2
\vdots	
les hyperplans	dim $(n-1)$
\mathbb{R}^n	dim n

ex1: Montrer que $\mathcal{L} = \{ \vec{u}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + 5z = 0 \}$ est un sev de \mathbb{R}^3

* $2 \cdot 0 - 0 + 5 \cdot 0 = 0$, donc $\vec{0} \in \mathcal{L}$

* Je prends 2 vecteurs $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z') \in \mathcal{L}$ $\vec{u} + \vec{v} = (x+x', y+y', z+z')$

$$2(x+x') - (y+y') + 5(z+z') = 2x + 2x' - y - y' + 5z + 5z'$$
$$= (2x - y + 5z) + (2x' - y' + 5z')$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } \vec{u} \in \mathcal{L}}}{0} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } \vec{v} \in \mathcal{L}}}{0} = 0 \text{ donc } \underline{\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{L}}$$

\mathcal{L} est stable pour +

* je prends un vecteur $\vec{u}(x, y, z) \in \mathcal{L}$ et $a \in \mathbb{R}$ $a\vec{u} = (ax, ay, az)$

$$2(ax) - (ay) + 5(az) = a(2x - y + 5z) = a \cdot 0 \quad \text{car } \vec{u} \in \mathcal{L} \\ = 0 \quad \text{donc } a\vec{u} \in \mathcal{L}$$

\mathcal{L} est stable pour \cdot

donc \mathcal{L} est un sous-espace de \mathbb{R}^3

2.2 les sous-ensembles de l'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$

remarque : L'ensemble des poly de degré n n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$

$$\text{en effet : } \underbrace{(2X^3 - X^2 + X + 5)}_{\text{degré } 3} + \underbrace{(-2X^3 + 2X^2 - 3)}_{\text{degré } 3} = \underbrace{X^2 + X + 2}_{\text{degré } 2}$$

II] L'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ ($\mathbb{R}_n[X] = \left\{ a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \mid \forall i, a_i \in \mathbb{R} \right\}$) est un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$

La base canonique de $\mathbb{R}_m[x]$ est $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^{m-1}, x^m)$

$$\dim(\mathbb{R}_m[x]) = m+1 \quad \leftarrow \triangle$$

2.3 dans l'ensemble des suites

Ex: Montrer que l'ensemble des suites vérifiant: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = 0$ est un espace vectoriel. On montre que c'est un sev de l'ensemble des suites.

On l'appelle $\mathcal{U} = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = 0 \right\}$

* $0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$, donc la suite nulle est dans \mathcal{U}

* On prends $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 2 suites de \mathcal{U} . On s'intéresse à $w_n = u_n + v_n$

$$\begin{aligned} w_{n+2} + 3w_{n+1} + 2w_n &= (u_{n+2} + v_{n+2}) + 3(u_{n+1} + v_{n+1}) + 2(u_n + v_n) = (u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n) + (v_{n+2} + 3v_{n+1} + 2v_n) \\ &= 0 + 0 \quad (\text{car les 2 suites sont dans } \mathcal{U}) \\ &= 0. \quad \text{Donc } \underline{w_n}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

\mathcal{U} est stable pour +

* je prends $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}$ et $a \in \mathbb{R}$ $v_n = a u_n$

$$v_{n+2} + 3v_{n+1} + 2v_n = a u_{n+2} + 3a u_{n+1} + 2a u_n = a (u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n)$$

$$= a \cdot 0 \quad \text{car } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}$$

$$= 0 \quad \text{donc } (a u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}$$

\mathcal{U} est stable pour \cdot .

\mathcal{U} est un sev de l'ensemble des suites

Q: Trouver une base de \mathcal{U} . Donner sa dimension

$$P(x) = X^2 + 3X + 2 \quad \Delta = 1 \quad 2 \text{ rac. } \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

$$u_n = A(-2)^n + B(-1)^n$$

$$\mathcal{U} = \left\{ (A(-2)^n + B(-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid A, B \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\underbrace{\left((-2)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}}_{\text{une base de } \mathcal{U}}, \left((-1)^n \right)_{n \in \mathbb{N}} \right) \quad \underline{\dim(\mathcal{U}) = 2}$$

Ex. 4 Dans l'ensemble des matrices

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b-2c & b+3c & a-6b+c \\ c & a-b & 2a-c \end{pmatrix} \text{ où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Montrer que E est un sev de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Donner une base de E et sa dimension.

* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$

* Je prends $A = \begin{pmatrix} a+b-2c & \dots \\ c & \dots \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a'+b'-2c' & \dots \\ c' & \dots \end{pmatrix} \in E$

$$B = A + A' = \begin{pmatrix} a+b-2c & b+3c & \dots \\ c & \dots & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'+b'-2c' & \dots \\ c' & \dots & \dots \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a+a'+b+b'-2c-2c' & \dots & \dots \\ c+c' & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta - 2\gamma & \beta + 3\gamma & \alpha - 6(\beta + \gamma) \\ \gamma & \alpha - \beta & 2\alpha - \gamma \end{pmatrix}$$

où $\alpha = a+a'$ $\beta = b+b'$
et $\gamma = c+c'$

donc $A + A' \in E$

E est stable pour $+$

* On montre par ailleurs que

E est stable pour \cdot

E est un sev de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a+b-2c & b+3c & a-6b+c \\ c & a-b & 2a-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b & -6b \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2c & 3c & c \\ c & 0 & -c \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{une base de } E} \right) \quad \underline{\dim(E) = 3}$$

2.5. Dans l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

appel: la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est libre lorsque

$$\boxed{\text{Si } a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_p \vec{e}_p = \vec{0}, \text{ alors } a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0}$$