

←

$u_0 = 1$ $u_{n+1} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est
croissante
c.à.d

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$
Initialisation : pour $n=0$ $u_0 = 1$ $u_1 = \sqrt{\frac{0+1}{0+1}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
 $u_0 \leq u_1$ Ok

Hérédité : Je prends un $n \geq 0$. Je suppose que $u_n \leq u_{n+1}$
 (on doit montrer que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$)

$u_n \leq u_{n+1} \implies$ (on ajoute 1) $u_n + 1 \leq u_{n+1} + 1$

On prend la $\sqrt{\quad}$: (si $0 \leq A \leq B$ alors $\sqrt{A} \leq \sqrt{B}$. On dit que la fonction

$\sqrt{\quad}$ est croissante)
 $\sqrt{u_n + 1} \leq \sqrt{u_{n+1} + 1}$ (car $\sqrt{\quad}$ est croissante)
 $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ CQFD On conclut

DM

① $f_2(x) = x^2 - x - 2$ $f_2'(x) = 2x - 1$ f_2' s'annule en $\frac{1}{2}$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f_2'	-	0	+
f_2	-2		$+\infty$

$a < -2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

f_2 est strict^r croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ de -2 à $+\infty$,
et continue

donc f_2 s'annule une seule fois

$$f_3(x) = x^3 - x^2 - 2x - 3 \quad f_3'(x) = 3x^2 - 2x - 2$$

$$f_3''(x) = 6x - 2 \quad f_3'' \text{ s'annule en } \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

x	0	$\frac{1}{3}$	a	$+\infty$
f_3''	-2	-	0	+
f_3'	-2		$-\frac{7}{3}$	$+\infty$

on trouve une Δ pue
 $a = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$

(23)

x	0	a	$+\infty$
f_3'	-	0	+
f_3	-3		$+\infty$

$b < -3$

(24) f_3 s'annule une seule fois sur \mathbb{R}^+ car strict^t croissante et continue de $b < -3$ à $+\infty$.

(3) $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x - 4$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x - 3$

$f''(x) = 12x^2 - 6x - 4$

$f'''(x) = 24x - 6$

$f'''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
f''	-	0	+
f'	-4		$+\infty$

$\alpha < -4$

f'' ne s'annule qu'une fois en c (comme avant)
en β

x	0	β	$+\infty$
f''	-	0	+
f'	-3		$+\infty$

$\alpha < -3$

f' ne s'annule qu'une fois en $d < -3$ (")
en γ

x		γ	
f''	-	0	+
f'	-4		$+\infty$

$\alpha < -4$

f ne s'annule qu'une seule fois (")

$$(4) \quad g_n(x) = x^n - x^{n-1} - 2x^{n-2} - 3x^{n-3} \dots - (n-2)x^2 - (n-1)x - n$$

On dérive 1 fois: $g'_n(x) = nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2} - 2(n-2)x^{n-3} \dots$

2 fois: $g''_n(x) = n(n-1)x^{n-2} - (n-1)(n-2)x^{n-3} \dots$

3 fois: $g'''_n(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3} - (n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} + \dots$

⋮

$n-1$ fois $g^{(n-1)}(x) = n!x - (n-1)! + 0 + \dots + 0$

$g^{(n-1)}(x)$ s'annule $\text{qd } n!x = (n-1)! \Leftrightarrow x = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$g^{(n-1)}(x)$	-	0	+
$g^{(n-2)}(x)$		↘	↗

De proche en proche, on a tous les n tableaux de variation.
Comme dans les \mathcal{Q} précédents

$$g_n(x) = x^n - x^{n-1} - 2x^{n-2} - 3x^{n-3} \dots - (n-2)x^2 - (n-1)x - n$$

$$h_n(x) = g_n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^{n-1}} - 2\frac{1}{x^{n-2}} - 3\frac{1}{x^{n-3}} \dots - \frac{(n-2)}{x^2} - \frac{(n-1)}{x} - n$$

$$= \frac{1 - x - 2x^2 - 3x^3 \dots - (n-2)x^{n-2} - (n-1)x^{n-1} - nx^n}{x^n}$$

$N(x)$

$$N'(x) = -1 - 4x - 9x^2 \dots - n^2 x^{n-1}$$

< 0

x	0	$+\infty$
N'		$-$
N	1	$-\infty$

$$N(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -nx^n = -\infty$$

Est strict' décroissante et continue de 1 à $-\infty$, donc elle s'annule une seule fois.

6.5 ATTENTION

- aux racines
- aux traits de fraction
- aux simplifications
- aux inégalités

Exemple 2 : Montrer que $\forall x > 0$, $\ln(1+x) < x \iff \ln(1+x) - x < 0$

On étudie la fonction $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $f: x \mapsto \ln(1+x) - x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1 - (1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x} < 0, \quad \forall x > 0$$

x	0	$+\infty$
f'		-
f	0	\searrow

$$f(0) = \ln(1) - 0 = 0 - 0 = 0$$

donc $\forall x > 0$, $f(x) < 0$

$$\ln(1+x) - x < 0 \quad \ln(1+x) < x$$

• deux formes indéterminées pour le calcul des limites

$$\infty - \infty \quad \text{ex: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = ?$$

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \text{ex: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 4x}{x^3 + 5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

$$\frac{0}{0} \quad \text{ex: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 4x}{x^3 + 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[2x^2 + 4]}{x[x^2 + 5]} = \frac{4}{5}$$

$$0 \cdot \infty \quad \text{ex: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot (x^3 + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} (x^2 + \frac{2}{x}) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$1^\infty \quad \text{ex: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.718 \dots \quad \text{??} \quad \text{si si}$$

$\frac{0}{\infty}$ et $\frac{\infty}{0}$ ne sont pas des formes indéterminées $\frac{0}{\infty} = 0$ $\frac{\infty}{0} = \infty$

$\frac{1}{\infty}$ et $\frac{1}{0}$

 $\frac{1}{\infty} = 0$ $\frac{1}{0} = \infty$

6.5 Pour le calcul des limites: **METTRE LE PLUS GRAND EN FACTEUR**

ex: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 4x}{x^3 + 5x} = ?$

qd x est proche de 0, x^3 est bcp plus petit que x

ex: Si $x = 10^{-4}$, alors $x^3 = (10^{-4})^3 = 10^{-12}$

Ici, le plus grand, c'est x . On le met en facteur.

$$\frac{2x^3 + 4x}{x^3 + 5x} = \frac{x [2x^2 + 4]}{x [x^2 + 5]} = \frac{2x^2 + 4}{x^2 + 5} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{4}{5}$$

Pour contre, en $+\infty$, x^3 est bcp plus grand que x , donc

$$\frac{2x^3 + 4x}{x^3 + 5x} = \frac{\cancel{x^3} [2 + \frac{4}{x^2}]}{\cancel{x^3} [1 + \frac{5}{x^2}]} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \text{ f.o.}}{1 \text{ f.o.}} = 2$$

ex 3: $\lim_{0^+} \frac{\sqrt{x^3+x^2}}{2x^2+x} = \frac{0}{0}$. Zuerst F.I

$$\lim_{0^+} \frac{\sqrt{x^2(x+1)}}{x(2x+1)} = \lim_{0^+} \frac{\cancel{x} \sqrt{x+1}}{\cancel{x}(2x+1)} = \frac{\sqrt{1}}{1} = 1$$

$\lim_{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+x^2}}{2x^2+x} = \frac{\infty}{\infty}$. Zuerst f.I

$$= \frac{\sqrt{x^3(1+\frac{1}{x})}}{x^2(2+\frac{1}{x})} = \frac{x^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x^2(2+\frac{1}{x})}$$

$\xrightarrow{+\infty} 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2} = x^{\frac{3}{2}-2} = x^{-0,5} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$(\frac{1}{\sqrt{x}})$$