

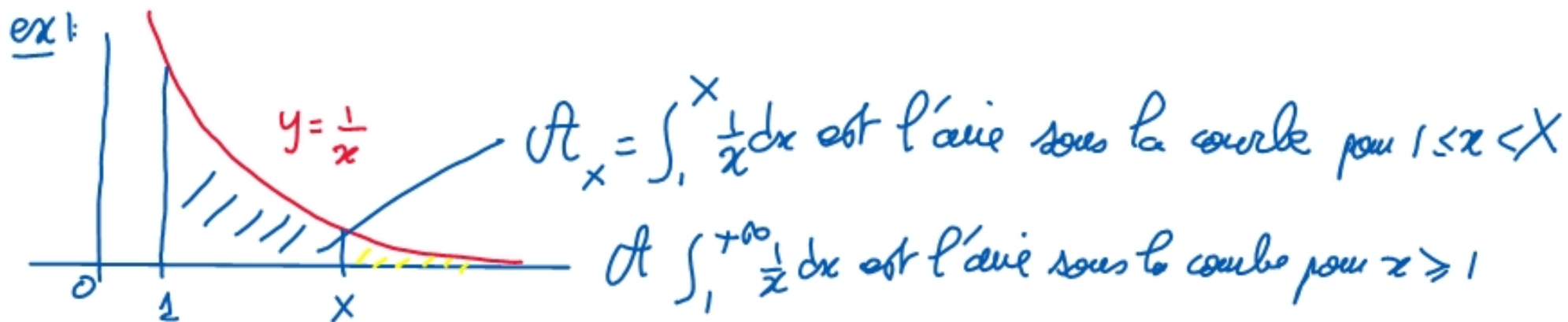
~~Generalized~~

## Intégrales Généralisées (ou intégrales impropres)

I Cas où l'intervalle d'intégration est infini (il y a  $\infty$  dans les bornes)

exs:  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = ?$      $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = ?$      $\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{x} dx = ?$

def:  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  converge (CV) lorsque  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(x) dx$  existe et est finie



$$A_x = \left[ \ln(x) \right]_1^X = \ln(X) - \ln(1) = \ln(X) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty$$

on dit que  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  DIV (diverge)

ex2:

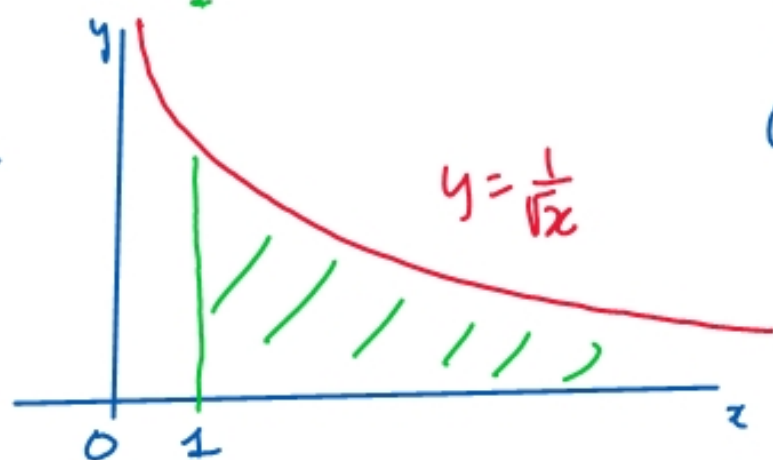


$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^X = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{1}{X} + 1 = 1$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ CV}}$$

ex3:



$$A = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X x^{-1/2} dx$$

$$A = \lim_{+\infty} \left[ \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} \right]_1^X = \lim_{+\infty} \left[ \frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_1^X$$

$$A = \lim_{+\infty} (2\sqrt{x} - 2) = +\infty$$

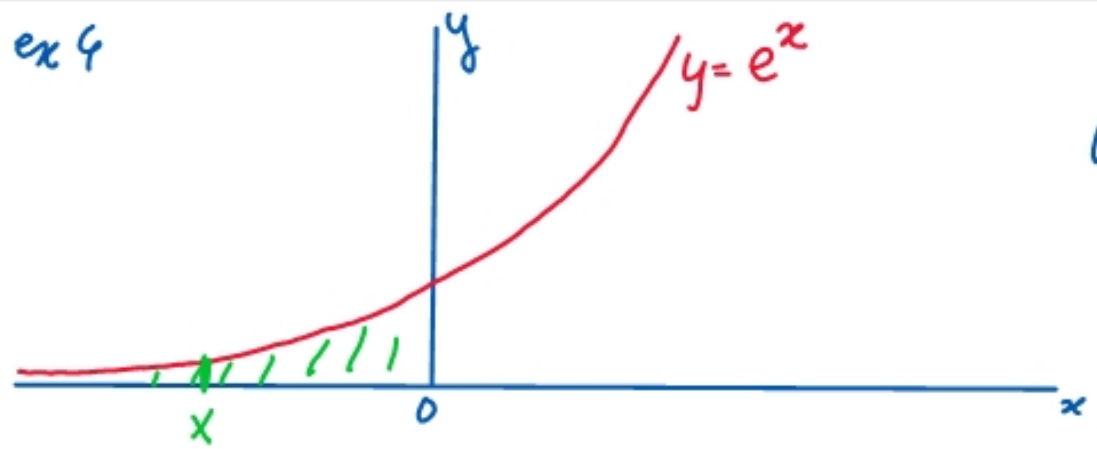
$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ DIV}}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{cte}$$

$n \neq -1$

Integrales de Riemann :

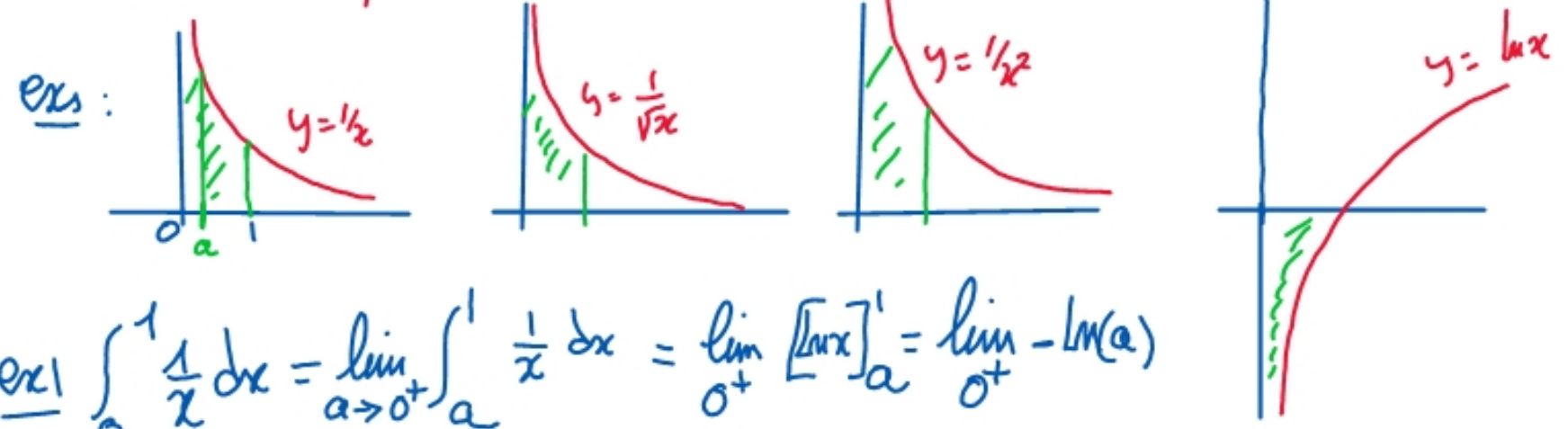
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx \quad \begin{cases} \text{CV qd } a > 1 \\ \text{DIV qd } a \leq 1 \end{cases}$$



$$A = \int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{X \rightarrow -\infty} \int_X^0 e^x dx$$

$$A = \lim_{-\infty} [e^x]_X^0 = \lim_{-\infty} (1 - e^X) = 1 - 0 = 1$$

II Cas où la fonction devient infinie



ex 1

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{0^+} [\ln x]_a^1 = \lim_{0^+} -\ln(a) = +\infty$$

$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  Div

ex 2

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{0^+} [2\sqrt{x}]_a^1 = \lim_{0^+} (2 - 2\sqrt{a}) = 2$$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  CV

ex 3 : On trouve que  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$  Div et  $\int_0^1 \ln(x) dx$  CV

Intégrales de Riemann en 0 :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^n} dx \begin{cases} \text{CV} \text{ qd } n < 1 \\ \text{Div} \text{ qd } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_a^1 \ln(x) dx = \int_a^1 1 \cdot \ln(x) dx \quad \text{I.P.P.} \quad \begin{cases} u = \ln(x) & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{cases}$$

$$= [x \ln x]_a^1 - \int_a^1 \frac{1}{x} \cdot x dx = [x \ln x - x]_a^1 = -1 - a \ln a + a$$

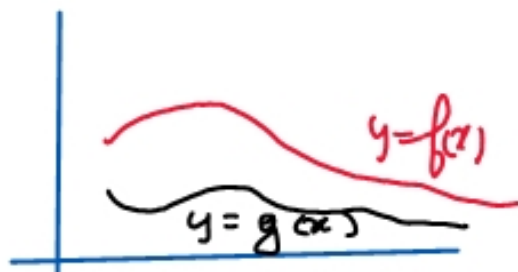
$$\lim_{a \rightarrow 0^+} a \ln a = 0_{x \rightarrow 0} \quad \text{F.I.}$$

$$= 0 \quad (\text{T des courbes comparées})$$

$$\int_0^1 \ln(x) dx = -1$$

$$\int_0^1 \ln(x) dx \text{ CV}$$

### III Critères de convergence



T de comparaison:

$$\text{Si } \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ CV, alors } \int_1^{+\infty} g(x) dx \text{ CV}$$

$$\text{Si } \int_1^{+\infty} g(x) dx \text{ Div, alors } \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ Div}$$

T des équivalents: Si  $0 \leq g \sim f$ , alors  $\int_0^{+\infty} g(x) dx$  et  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  ont même nature

$\left[ f \sim g, \text{ donc } \frac{f}{g} \xrightarrow{+\infty} 1, \text{ donc pour } x \text{ assez grand } (x > A \in \mathbb{R}): \frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2 \right.$

$$\frac{1}{2} g(x) \leq f(x) \leq 2g(x) \quad (\text{car } g(x) \geq 0, \forall x > A)$$

Si  $\int_A^{+\infty} g(x) dx < \infty$ , alors  $\int_A^{+\infty} 2g(x) dx < \infty$

donc  $\int_A^{+\infty} f(x) dx < \infty$  (T de comparaison)

Si  $\int_A^{+\infty} g(x) dx = \infty$ , alors  $\int_A^{+\infty} \frac{1}{2} g(x) dx = \infty$

donc  $\int_A^{+\infty} f(x) dx = \infty$  (T de comparaison)

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^A + \int_A^{+\infty} \quad \text{et } \int_0^A \text{ ne pose pas de problème II}$$

ex1: Quelle est la nature de l'intégrale impropre  $I = \int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{x^4+1} dx$

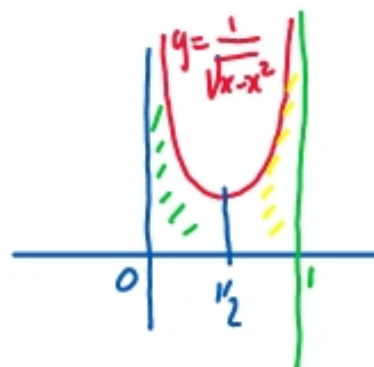
pb en  $+\infty$ :  $\frac{2x^2}{x^4+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x^2}{x^4} = \frac{2}{x^2}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ CV (Riemann)} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx \text{ CV}$$

donc  $\int_1^{+\infty} \frac{2x^2}{x^4+1} dx \text{ CV (T des } \sim)$

donc  $\int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{x^4+1} dx \text{ CV}$

ex2:  $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx$



la fonction devient infinie en 0 et en 1!

pb en 0:  $\frac{1}{\sqrt{2-x^2}} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$

(car  $\frac{1/\sqrt{x}}{1/\sqrt{2-x^2}} = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2-x^2}{x}} = \sqrt{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sqrt{1} = 1$ )

$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ CV (Riemann en 0)},$  donc  $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx \text{ CV (T des } \sim)$

pb en 1:  $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} ?$

chgt de variable  $X = x-1$   
 $x = 1+X$

si  $x \rightarrow 1^-$   
alors  $x-1 \rightarrow 0^-$

$$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+X-(1+X)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+X-1-2X-X^2}} = \frac{1}{\sqrt{-X^2-X}} \underset{0^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{-X}}$$

$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  CV (Riemann), donc  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx$  CV (T des  $\sim$ )

$\int_0^{1/2}$  et  $\int_{1/2}^1$  CV, donc  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx$  CV

Convergence Absolue: def: l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  converge absolument (CVA)

lorsque  $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$  converge

$\square$  CVA  $\Rightarrow$  CV

ex1:  $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$  problème en  $+\infty$

$$0 \leq \left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ CV (Riemann)}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx \text{ CV (Tde comparaison)} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \text{ CV (CVA} \rightarrow \text{CV)}$$

ex2:  $J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$  pb en  $+\infty$   $0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \text{ DIV} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \text{ ?? On ne peut pas conclure}$$

$J_x = \int_1^x \frac{\sin x}{x} dx$  I&D |  $u = \frac{1}{x}$   $u' = -\frac{1}{x^2}$   
 $v' = \sin x$   $v = -\cos x$

$$J_x = \left[ -\frac{\cos x}{x} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos z}{z^2} dz$$

$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$   $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ CV (Riemann)}$   
 donc  $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx \text{ CV (Tde comparaison)}$

donc  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ CV (CVA} \rightarrow \text{CV)}$