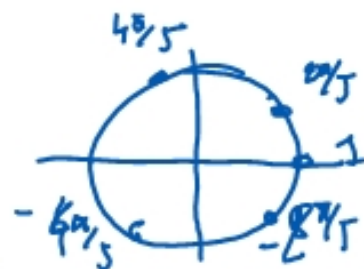


DM 8

$$z^5 - 1 = 0$$

(1)  $z^5 = 1 = 1 \cdot e^{i0}$



(2) les racines 5<sup>èmes</sup> de  $Re^{i\theta}$  sont les  $R^{1/5} e^{i(\theta/5) + i2k\pi/5}$  où  $k=0,1,2,3$  ou  $4$

ici  $R=1$  et  $\theta=0$ . 5 racines :  $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$  où  $k=0,1,\dots,4$

$$\text{donc } z^5 - 1 = (z - 1) \underbrace{(z - e^{i2\pi/5})(z - e^{-i2\pi/5})}_{2\cos(2\pi/5)} \underbrace{(z - e^{i4\pi/5})(z - e^{-i4\pi/5})}_{2\cos(4\pi/5)}$$

$$= (z - 1) \left( z^2 - \underbrace{(e^{i2\pi/5} + e^{-i2\pi/5})}_{2\cos(2\pi/5)} z + 1 \right) \left( z^2 - \underbrace{(e^{i4\pi/5} + e^{-i4\pi/5})}_{2\cos(4\pi/5)} z + 1 \right)$$

$$\underline{z^5 - 1 = (z - 1) (z^2 - 2\cos(2\pi/5)z + 1) (z^2 - 2\cos(4\pi/5)z + 1)}$$

(12)  $z^5 - 1 \begin{array}{l} | z - 1 \\ \hline z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 \end{array} = Q(z)$

(13) known  $a, b, c$  tel  $\frac{\mathcal{P}(z)}{z^2} = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 &= a z^2 \left( z^2 + 2z \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) + b z^2 \left( z + \frac{1}{z} \right) + c z^2 \\ &= a z^4 + 2a z^2 + a + b z^3 + b z + c z^2 \\ &= a z^4 + b z^3 + (2a + c) z^2 + b z + a \\ &1 z^4 + 1 z^3 + 1 z^2 + 1 z + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = 1 \quad ; \quad b = 1 \quad ; \quad 2a + c = 1$$

$$\Rightarrow c = 1 - 2 = -1$$

$$\frac{\mathcal{P}(z)}{z^2} = \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 + \left( z + \frac{1}{z} \right) - 1$$

(14)  $a z^2 + b z + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + z - 1 = 0$

$$\Delta = 5$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

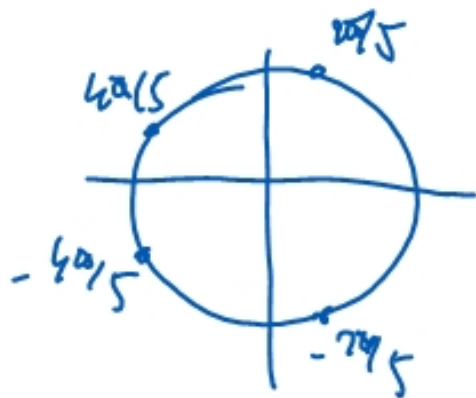
(15) On pose  $z = z + \frac{1}{z}$

1<sup>er</sup> cas avec  $z = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$z\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = z^2 + 1 \Leftrightarrow z^2 - z\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1 = 0$$

$$\Delta = \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} - 4 = \frac{-10-2\sqrt{5}}{4} = \frac{-5-\sqrt{5}}{2} < 0$$
$$= \left(\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2} i\right)^2$$

2 racines.  $z = \frac{-1+\sqrt{5} \pm \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2} i}{2} = e^{i\frac{2\pi}{5}}$



$$z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i \frac{1}{2} \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{5}}$$
$$\begin{aligned} &> 0 &> 0 &= \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \end{aligned}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5}}$$

# Systems linéaires d'équa diff.

I Rappels Equa Diff.

ordre 1 les sols de  $y' + ay = 0$  sont les  $y = Ae^{-ax}$  où  $A \in \mathbb{R}$

ordre 2 On trouve les sols de  $ay'' + by' + cy = 0$  avec les racines du polynôme  $a\lambda^2 + b\lambda + c$

II Systems diagonalisables

Ex 1

$$\begin{cases} \dot{x} = -7x - 6y(t) \\ \dot{y}(t) = 12x(t) + 10y(t) \end{cases}$$

On cherche la fonction  $x(t)$  et  $y(t)$

??

..

$$\begin{matrix} \Downarrow \\ \Uparrow \end{matrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{U}} = A \vec{U}$$

On diagonalise  $A$

$$\begin{vmatrix} -7-x & -6 \\ 12 & 10-x \end{vmatrix} = (-7-x)(10-x) + 72 = x^2 - 10x + 7x - 70 + 72 = x^2 - 3x + 2$$

$$\Delta = 9 - 0 = 9 \quad 2 \text{ racines. } \frac{3 \pm 3}{2} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad 2 \text{ valeurs propres: } 1 \text{ et } 2$$

J'appelle  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .  
 J'appelle  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\text{Mat}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = A$  ) important

Espace propre pour la valeur propre 1:  $E_1 = \left\{ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / f(\vec{u}) = 1 \vec{u} \right\}$  (ou  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ )

$$f(\vec{u}) = 1 \vec{u} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x - 6y = x \\ 12x + 10y = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x - 6y = 0 \\ 12x + 9y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 3y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4x + 3y = 0 \quad \dim 1$$

on pose  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$   $E_1 = \text{Vect}(\vec{u})$

Espace propre pour 2:  $E_2 = \left\{ \vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / f(\vec{v}) = 2 \vec{v} \right\}$

$$f(\vec{v}) = 2 \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x - 6y = 2x \\ 12x + 10y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 6y = 0 \\ 12x + 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 2y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

On pose  $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$

$\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  car

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 8 = -1 \neq 0$$

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \text{coord de } f(\vec{u}) & \text{coord de } f(\vec{v}) \\ \text{dans } \mathcal{B}' & \text{dans } \mathcal{B}' \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{u}) = 1 \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$f(\vec{v}) = 2 \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

"

$$\underline{A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

le système  $\dot{\vec{u}} = A \vec{u}$  devient dans

$$\mathcal{B}' : \dot{\vec{u}}' = A' \vec{u}' \text{ avec } \vec{u}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ 2y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}' = x' & \textcircled{1} \\ \dot{y}' = 2y' & \textcircled{2} \end{cases}$$

Solutions de  $\textcircled{1}$   $\underline{x'(t) = A e^t}$

Sols de  $\textcircled{2}$   $\underline{y'(t) = B e^{2t}}$

Formules de chgt de base pour les vecteurs

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$P_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} \text{Coord} & \text{Coord} \\ \text{de } \vec{u} & \text{de } \vec{v} \\ \text{dans } B & \text{dans } B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^{2t} \\ Be^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3Ae^{2t} + 2Be^{2t} \\ -4Ae^{2t} - 3Be^{2t} \end{pmatrix}$$

$x(t)$   
 $y(t)$

ex2: 2 masses  $m_1$  (1 kg) et  $m_2$  (2 kg) sont reliées par un ressort de raideur  $k=2$  et de longueur à vide  $l_0 = 1$  m



A minute, Batmann envoie une pichenette dans  $m_1$ , telle que  $\dot{x}_1(0) = 3$  m/s



Que se passe-t-il ?



$$\left. \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1(t) = k(x_2 - x_1 - l) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) = -k(x_2 - x_1 - l) \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 - 2 \\ \ddot{x}_2 = x_1 - x_2 + 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1(0) = 0 & x_2(0) = 1 \\ \dot{x}_1(0) = 3 & \dot{x}_2(0) = 0 \end{matrix}$$

HOM  $\begin{cases} \ddot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 \\ \ddot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\ddot{\vec{u}} = A \cdot \vec{u}$$

J'appelle  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$

J'appelle  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $A = \text{Mat}_B(f)$ .

$$\begin{vmatrix} -2-x & 2 \\ 1 & -1-x \end{vmatrix} = (-2-x)(-1-x) - 2 = x^2 + 3x + 2 - 2 = x^2 + 3x = x(x+3)$$

2 valeurs propres 0 et -3

Espace propre pour 0 :  $E_0 = \{ \vec{u}(y) \in \mathbb{R}^2 / f(\vec{u}) = 0\vec{u} \} = \text{Ker}(f)$

$$f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 0 \quad \boxed{\vec{u} = (1, 1)}$$

$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(\vec{u})$



Espace propre pour  $-3$ :  $f(\vec{v}) = -3\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = -3x \\ x - y = -3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

$$\vec{v} = (2i - 1)$$

$\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  car  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Le système  $\ddot{\vec{u}} = A\vec{u}$  devient dans  $\mathcal{B}'$

$$\ddot{\vec{u}}' = A'\vec{u}' \quad \text{ou} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1' = 0 \\ \ddot{x}_2' = -3x_2' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1' = a \Rightarrow \boxed{x_1' = at + b}$$

$$\dot{x}_2' + 3x_2' = 0$$

$$x_2^2 + 3a^2 \cos^2 + 3i$$

sols 
$$\underline{x_2 = e^{0t} (\alpha \cos(\sqrt{3}t) + \beta \sin(\sqrt{3}t))}$$