

III La théorie

def: Un polynôme est scindé si on peut le factoriser en produit de polynômes de degré 1

ex: $P(x) = (x-1)^2(x+3)$ est scindé

$P(x) = x^2 + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[x]$

est scindé dans $\mathbb{C}[x]$ ($x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$)

rappel: la matrice A est diagonalisable lorsque il existe \mathcal{L} inversible telle que

$$A' = \mathcal{L}^{-1} A \mathcal{L} \text{ est diagonale}$$

def: la matrice A est triagonalisable lorsque il existe \mathcal{L} inversible telle que

$$A' = \mathcal{L}^{-1} A \mathcal{L} \text{ est triangulaire}$$

$\boxed{T_1}$ A est trigonalisable \Leftrightarrow son polynôme caractéristique est scindé

les polynômes de $\mathbb{C}[\lambda]$ sont tous scindés, donc on peut toujours trigonaliser dans \mathbb{C}

$\boxed{T_2}$ Si le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable

$\boxed{T_3}$ A est diagonalisable \Leftrightarrow le poly caract de A est scindé
et
La dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante

exemple: Si $P(x) = (2-x)(3-x)^2$

Il y a 2 espaces propres $E_2 = \{ \vec{u} / f\vec{u} = 2\vec{u} \}$ $\dim(E_2) = 1$

$E_3 = \{ \vec{v} / f\vec{v} = 3\vec{v} \}$ $\dim(E_3) = 1 \text{ ou } 2$
par diagonalisable

$\boxed{14}$ Si a est une valeur propre de A ,

$$1 \leq \dim(E_a) \leq \text{mult}(a)$$

diagonalisable

multiplicité de a dans le polynôme caractéristique de A

ex. Si $P(x) = (2-x)^3(5-x)^2$, alors $\dim(E_2) = 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3$
et

$\dim(E_5) = 1 \text{ ou } 2$ diagonalisable

$\boxed{15}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le poly caract commun par $(-1)^n x^n$

ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$B = (\vec{i}, \vec{j})$ est la base canonique de \mathbb{R}^2

f est l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 tel que $\text{Mat}_B f = A$

Trouver toutes les suites vérifiant $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}}_{U_{n+1}} = A \underbrace{\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}}_{U_n}$

$$U_{n+1} = A U_n$$

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison A

donc $U_n = A^n U_0$ $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$

FIN

Mais que vaut A^n ?

On diagonalise: $P(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix} = (1-x)(4-x) + 2 = x^2 - 5x + 6$

$\Delta = 1$ 2 racines: $\frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$ 2 valeurs propres 2 et 3