

coll

$$B = \int_0^3 \frac{2x+9}{x^2+6x+18} dx$$

$$\Delta < 0$$

On se ramène à x^2+1 avec un changement de variable

$$\begin{aligned} x^2+6x+18 &= (x+3)^2+9 = 9\left(\frac{(x+3)^2}{9}+1\right) \\ &= 9\left(\left(\frac{x+3}{3}\right)^2+1\right) \end{aligned}$$

chgt $X = \frac{x+3}{3}$

$$\left(\frac{dX}{dx} = \frac{1}{3} \Rightarrow dx = 3dX \right)$$
$$\Rightarrow 3X = x+3$$
$$\Downarrow$$
$$x = 3X-3$$

$$B = \int_{x=1}^{x=2} \frac{2(3X-3)+9}{9(X^2+1)} dX$$

$$B = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{2X}{X^2+1} dX + \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{X^2+1} dX$$

$$= \frac{1}{3} \left[\ln(X^2+1) \right]_1^2 + \frac{1}{3} \left[\arctan X \right]_1^2 = \frac{1}{3} (\ln(5) - \ln(2)) + \frac{1}{3} (\arctan(2) - \arctan(1))$$

$$\begin{aligned}
 U_{n+1} - U_n &= \underbrace{\frac{1}{n+1}} + \frac{1}{(n+1)^2(n+1)!} - \underbrace{U_n} - \frac{1}{n^2 n!} \\
 &= \frac{1}{(n+1)(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)^2(n+1)!} - \frac{1}{n^2 n!}
 \end{aligned}$$

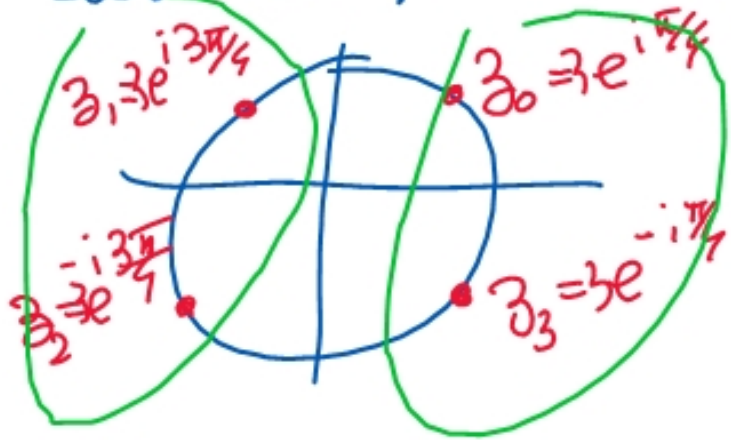
$$= \frac{(n+1)n^2 + n^2 - (n+1)^3}{(n+1)^2 (n+1)! n^2}$$

$$= \frac{n^3 + 2n^2 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}{\dots} = \frac{-n^2 - 3n - 1}{\dots} < 0$$

$P(x) = 2x^4 + 162$ Les racines vérifient $2x^4 + 162 = 0$

$\Rightarrow 2x^4 = -162 \Rightarrow x^4 = -81 = 81e^{i\pi}$

Les racines $4^{\text{èmes}}$ de $81e^{i\pi}$ sont les $z_k = 81^{1/4} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4})} = 3e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4})}$



$$P(x) = 2(x - 3e^{i\pi/4})(x - 3e^{-i\pi/4})(x - 3e^{i3\pi/4})(x - 3e^{-i3\pi/4})$$

$$= 2(x^2 - 3\sqrt{2}x + 9)(x^2 + 3\sqrt{2}x + 9)$$

$(x+1)^{2m} + (x-1)^{2m} + 1 = (x-1)Q(x) + R(x)$ et $\deg(R) < 1$
 $\Rightarrow R(x) = cste$

valeurs en 1: $2^{2m} + 1 = 0 + cste \Rightarrow R(x) = 2^{2m} + 1$

$$(x+1)^{2m} + (x-1)^{2m} + 1 = Q(x)(x-1)^2 + ax + b$$

• valeur en 1: $2^{2m} + 1 = a + b$

• on dérive:

$$2m(x+1)^{2m-1} + 2m(x-1)^{2m-1} = Q'(x)(x-1)^2 + Q(x) \cdot 2(x-1) + a$$

• valeur en 1: $2m \cdot 2^{2m-1} + 0 = 0 + 0 + a$

$$F(x) = \frac{2x^4 + 1}{(x-1)^2(x^2+1)} = E(x) + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

$2x^4 + 1 \mid x^4 + \dots$
 Fin 2 $E(x)$

$$b = \left. \frac{2x^4 + 1}{x^2 + 1} \right|_{x=1} = \frac{3}{2}$$

on x par x^2+1 :

$$\frac{2x^4 + 1}{(x-1)^2} = 2(x^2+1) + \frac{a(x^2+1)}{x-1} + \frac{b(x^2+1)}{x-1} + cx + d$$

valeur en i:

$$\frac{3}{(i-1)^2} = a(0+0) + c(i+d)$$

$$\frac{3}{1-2i-1} \quad \frac{3i}{2} = a + d$$

$c = \frac{3}{2}$ et $d = 0$

Réduction d'un endomorphisme, d'une matrice

I Valeurs Propres et Vecteurs Propres

def: $a \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de l'endomorphisme f lorsque
il existe $\vec{u} \neq \vec{0}$ tel que $f(\vec{u}) = a\vec{u}$

prop: Dans une base de vecteurs propres, la matrice de f est diagonale

def: $\vec{u} \neq \vec{0}$ tel que $f(\vec{u}) = a\vec{u}$ est un vecteur propre associé à la
valeur propre a

def: L'espace propre pour la valeur propre a est $E_a = \{ \vec{u} \mid f(\vec{u}) = a\vec{u} \}$

rqe: 0 est valeur propre de f signifie $\exists \vec{u} \neq \vec{0} / f(\vec{u}) = 0\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \text{ker}(f) \neq \{\vec{0}\}$$

rqe: a est valeur propre de f $\Leftrightarrow \exists \vec{u} \neq \vec{0} / f(\vec{u}) = a\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \text{---} / f(\vec{u}) - a\vec{u} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \text{---} / \underbrace{(f - a\text{Id})}_{g}(\vec{u}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \text{ker}(g) \neq \{\vec{0}\}$$

$$\Leftrightarrow g \text{ n'est pas bijective} \Leftrightarrow \det(g) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\det(f - a\text{Id}) = 0}$$

Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme caractéristique

$$P(x) = \det(f - x \text{Id})$$

II Exemples

Ex1: Calcul de A^n avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de \mathbb{R}^3

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$

Le polynôme caractéristique de A est $P(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 2 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$

$$P(x) \stackrel{\text{col 1}}{=} (2-x) \begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (2-x)(3-x)(1-x)$$

Les racines sont : 1, 2 et 3

Les valeurs propres de f sont 1, 2 et 3

Calcul de l'espace propre pour la valeur propre 1: $E_1 = \{ \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{u}) = 1 \vec{u} \}$

avec $\vec{u} = (x, y, z)$ $f(\vec{u}) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2z \\ x + 2y + 2z \\ z \end{pmatrix}$

$$f(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2z = x \\ x + 2y + 2z = y \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ \cancel{0 = 0} \end{cases} \left| \begin{array}{l} 2 \text{ eq } \div 2 \\ \text{inconnues} \\ \text{dimension } 1 \end{array} \right.$$

Si $x = t$: $z = -t$ et $y = -x - 2z = -t + 2t = t$ $\vec{u} : \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix}_{t \in \mathbb{R}}$

$$E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{u}) = 1 \vec{u}$$

Calcul de $E_2 = \left\{ \vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{v}) = 2\vec{v} \right\}$:

$$f(\vec{v}) = 2\vec{v} \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2z = 2x \\ x + 2y + 2z = 2y \\ z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient $f(\vec{v}) = 2\vec{v}$

Calcul de $E_3 = \left\{ \vec{w} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{w}) = 3\vec{w} \right\}$:

$$f(\vec{w}) = 3\vec{w} \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2z = 3x \\ x + 2y + 2z = 3y \\ z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient $f(\vec{w}) = 3\vec{w}$

$\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3 car $\det_{\mathcal{B}'}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$\det_{\mathcal{B}'} = \det A / \det \mathcal{B}$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \text{Coord de } f(\vec{u}_1) & f(\vec{v}_1) & f(\vec{w}_1) \\ \text{dans } \mathcal{B}' & \text{dans } \mathcal{B}' & \text{dans } \mathcal{B}' \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$f(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$f(\vec{w}_1) = 3\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A'$$

(On dit qu'on a diagonalisé A)

$$A'^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

formule de changement de base :

$$A' = Q^{-1} A Q \text{ où}$$

Q est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}'

$$A = Q A' Q^{-1} \text{ et}$$

$$A^n = Q A'^n Q^{-1}$$

$$\text{où } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w}$

Calcul de \mathcal{L}^{-1} : Dans \mathcal{L} , on a \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Dans \mathcal{L}^{-1} , on aura $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ \longrightarrow $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

col 2: $\vec{j} = \vec{v}$

col 3 $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} \Rightarrow \vec{i} = \vec{w} - \vec{j} = \vec{w} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \vec{i}'$

col 1: $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{u} = \vec{w} - \vec{v} + \vec{v} - \vec{u} = \vec{w} - \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \vec{k}'$

donc $\mathcal{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^n = \mathcal{L} A^n \mathcal{L}^{-1} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2^n & 2^n & 0 \\ 3^n & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2^n & 2^n & 0 \\ 3^n & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & -1+3^n \\ -2^n+3^n & 2^n & -1+3^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$