

~~_____~~
① $\cos(2x)$ de deux façons $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

② def de la matrice de f dans la base \mathcal{B}'

③ \mathcal{L} de $\ln(1-x)$ à l'ordre n $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} \dots - \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$

④ def de la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}'



⑤ dérivées de $\tan(x)$ $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$

$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \text{Coord de } f(\vec{u}) \\ \text{de } \mathcal{B}' \end{pmatrix} \quad \text{de } \begin{pmatrix} \text{Coord de } f(\vec{v}) \\ \text{de } \mathcal{B}' \end{pmatrix} \quad \text{de } \begin{pmatrix} \text{Coord de } f(\vec{w}) \\ \text{de } \mathcal{B}' \end{pmatrix}$ où $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}' = \begin{pmatrix} \text{Coord de } \vec{u} \\ \text{de } \mathcal{B} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{Coord de } \vec{v} \\ \text{de } \mathcal{B} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{Coord de } \vec{w} \\ \text{de } \mathcal{B} \end{pmatrix}$ où $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$$\sum_{k=1}^n k = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \underbrace{\sum_{k=2}^{n+1} (k-1)}_{=1+2+3+\dots+n} = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} k-1 = 2+3+\dots+n+(n+1) - 1$$

$$= \underbrace{1+2+\dots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) - 2 = \frac{n(n+1)}{2} + n - 1 = \frac{n^2+n+2n-2}{2} = \frac{n^2+3n-2}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n 1 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ fois}} = n$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} k = \underbrace{2+3+\dots+n+(n+1)}_{\frac{n(n+1)}{2} + n} = \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n^2+n+2n}{2} = \frac{n^2+3n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n n = \underbrace{n+n+\dots+n}_{n \text{ fois}} = n^2$$

$$\sum_{k=p}^q k = \frac{(q-p+1) \cdot (p+q)}{2} = \cancel{p+q^2} - \cancel{p^2} + pq$$

~~$$\sum_p^q k = \underbrace{p+(p+1)+\dots+(p+q)}_{(q+1)p + \frac{q(q+1)}{2}} = (q+1)p + \frac{q(q+1)}{2}$$~~

$$= p + (p+1) + \dots + q = (1+2+\dots+q) - (1+2+\dots+(p-1))$$

$$= \frac{q(q+1)}{2} - \frac{(p-1)p}{2} = \frac{q^2+q-p^2+p}{2}$$

$$\sum_{k=3}^{n+3} r^k = r^3 + r^4 + \dots + r^{n+3}$$

$$= r^3 [1 + r + r^2 + \dots + r^n] = r^3 \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \quad \text{qd } r \neq 1$$

$$= \cancel{r^3} (n+1) \quad \text{qd } r = 1$$

$$13 + 15 + 17 + \dots + 43 = \sum_{k=6}^{21} (2k+1) = 2 \sum_{k=6}^{21} k + \sum_{k=6}^{21} 1$$

$$= 2 \frac{(21+6) \cdot (21-6+1)}{2} + 21-6+1$$

$$= 27 \cdot 16 + 16 = 16 \cdot 28 = 448$$

28
16
4
168
28
448

$$13 + 16 + 19 + \dots + 43 = \sum_{k=4}^{14} (3k+1) = 3 \sum_{k=4}^{14} k + \sum_{k=4}^{14} 1 = 3 \frac{(4+14) \cdot (14-4+1)}{2} + 14-4+1$$

$$= 3 \times \frac{18 \cdot 11}{2} + 11 = 27 \times 11 + 11 = 28 \times 11 = 308$$

ex1: Calcul de $P(X) = \begin{vmatrix} -X & a & a \\ a & -X & a \\ a & a & -X \end{vmatrix} = \rightarrow \begin{vmatrix} 2a-X & a-X & a-X \\ a & -X & a \\ a & a & -X \end{vmatrix} L_1+L_2+L_3$

$$P(X) = \begin{vmatrix} 2a-X & 0 & 0 \\ a & -X-a & 0 \\ a & 0 & -X-a \end{vmatrix} \stackrel{\text{dépt/}}{=} 0 - 0 + (-X-a) \begin{vmatrix} 2a-X & 0 \\ a & -X-a \end{vmatrix}$$

$C_1 \quad C_2-C_1 \quad C_3-C_1$

$$P(X) = (-X-a)(2a-X)(-X-a) = (-X-a)^2(2a-X) = (X+a)^2(2a-X)$$

2 racines: $-a$, de multiplicité 2
 $2a$, racine simple

ex2: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \stackrel{\text{dépt/}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 24$

$\boxed{\text{T}}$ $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & a_2 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & 0 \\ * & * & \dots & a_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_i$

Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est le produit des termes de la diagonale

ex 3

$$D_n =$$

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & -\sqrt{6} & 0 & \dots & 0 \\ -\sqrt{6} & 5 & -\sqrt{6} & & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} & 5 & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & -\sqrt{6} \\ 0 & \dots & 0 & -\sqrt{6} & 5 \end{array}$$

n lignes et n colonnes

$$\begin{array}{l} \text{dept/} \\ = 5 \\ \downarrow \end{array} \left| \begin{array}{ccc|c} 5 & -\sqrt{6} & 0 & 0 \\ -\sqrt{6} & 5 & & 1 \\ 0 & & -\sqrt{6} & 1 \\ & & -\sqrt{6} & 5 \end{array} \right| \leftarrow D_{n-1}$$

$n-1$ lignes et $n-1$ colonnes

$$+\sqrt{6} \left| \begin{array}{cccc|c} -\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & & & 0 \\ 0 & -\sqrt{6} & 5 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & -\sqrt{6} & 5 & \end{array} \right| + 0 \dots + 0$$

$n-1$ lignes et $n-1$ col.

dept/ Col 1

$$D_n = 5 D_{n-1} + \sqrt{6} \times (-\sqrt{6}) \left| \begin{array}{ccc|c} 5 & -\sqrt{6} & 0 & 0 \\ -\sqrt{6} & & & \sqrt{6} \\ 0 & & -\sqrt{6} & 5 \end{array} \right| \leftarrow D_{n-2}$$

$n-2$ lignes et colonnes

$$D_n = 5 D_{n-1} - 6 D_{n-2}$$

$$D_n - 5D_{n-1} + 6D_{n-2} = 0$$

$$P(x) = x^2 - 5x + 6 \quad \Delta = 25 - 24 = 1$$

$$\text{racines } \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

$$\underline{D_n = A2^n + B3^n}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 5 \end{vmatrix} = 25 - 6 = 19$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 5 & -\sqrt{6} & 0 \\ -\sqrt{6} & 5 & -\sqrt{6} \\ 0 & -\sqrt{6} & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} = 5 \begin{vmatrix} 5 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 5 \end{vmatrix} + \sqrt{6} \begin{vmatrix} -\sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 19 + \sqrt{6} \cdot (-\sqrt{6} \cdot 5) \\ = 5 \cdot 19 - 6 \cdot 5 \\ = 5(19 - 6) = 5 \cdot 13 = 65$$

$$D_2 = \begin{cases} 4A + 9B = 19 \\ 8A + 27B = 65 \end{cases}$$

$$D_3$$

$$L_2 - 2L_1: 9B = 65 - 38 = 27 \Rightarrow B = 3$$

$$\Rightarrow L_1 \quad 4A = 19 - 27 = -8 \Rightarrow A = -2$$

$$D_n = 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n$$

$$D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

propriétés: $\det(aA) = a^n \cdot \det A$ où n est la taille de A

$$\underline{\det({}^t A) = \det(A)}$$

$$\underline{\det(I_n) = 1}$$

$$\boxed{\det(AB) = \det(A) \det(B)}$$

$$\boxed{\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}}$$

P est inversible $\Leftrightarrow \det(P) \neq 0$

$$\left[\begin{array}{l} P \cdot P^{-1} = I_n \\ \det(P \cdot P^{-1}) = \det(I_n) = 1 \end{array} \right]$$

$$\det(P) \cdot \det(P^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$$

$$\underline{\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(C)} \quad / \quad \text{ex: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot 7$$

↑
déterminant par bloc

Si on change de base, le déterminant ne change pas

$$\boxed{A' = Q^{-1} A Q \text{ où } A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) ; A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)}$$

et Q est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}'

$$\begin{aligned} \det(A') &= \det(Q^{-1} A Q) = \det(Q^{-1}) \det(A) \det(Q) \\ &= \frac{1}{\det(Q)} \det(A) \det(Q) \quad \square \end{aligned}$$

$\det_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = 0 \Leftrightarrow$ la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est liée

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \neq 0$

def: Le déterminant d'un endomorphisme f de \mathbb{R}^n est
 $\det(f)$ = $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ où \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^n

propriétés: Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

Rappel: f est bijective $\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible



f est bijective $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$$

$$\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g) \quad [\det(f \circ g) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g))]$$

$$\text{et } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \quad \Rightarrow \quad \det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g) \quad]$$

$$\det(\text{Id}_{\mathbb{R}^n}) = 1$$

II Inverse d'une matrice avec le déterminant

Rappel: Le mineur relatif à a_{ij} est le déterminant $\Delta_{i,j}$ obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j

def: le cofacteur de a_{ij} est $(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$

def: La Comatrice de A est la matrice contenant les cofacteurs

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t \text{COM}(A)$$

ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\text{COM}(A) = \begin{pmatrix} +4 & -2 \\ -3 & +1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{OK Incomat}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{COM}(B) = \begin{pmatrix} +|0\ 1\ 1| & -|1\ 1\ 1| & +|1\ 1\ 0| \\ -|1\ 1\ 1| & +|0\ 1\ 1| & -|0\ 1\ 1| \\ +|1\ 0\ 1| & -|0\ 1\ 1| & +|0\ 1\ 0| \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) \stackrel{\det(A)}{=} \begin{matrix} \det \\ \det \end{matrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} = 1 + 1 = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{COM}(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$