

① def de la matrice de passage de la base \mathcal{A} à la base \mathcal{B}

$$P_{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \text{coordonnées de} \\ \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ ds & ds & ds \\ \mathcal{A} & \mathcal{A} & \mathcal{A} \end{pmatrix} \text{ où } \mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

② $\sin \theta$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$: $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

③ Somme partielle arithmétique $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

④ $\sin(y \pm x) = \sin y \cos x \mp \cos y \sin x$

⑤ DL de $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre n

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$2e^{i\frac{2022\pi}{3}} = 2e^{i674\pi}$$

$$= 2e^{i2\pi} = 2e^{i0} = 2$$

$$\begin{array}{r} 2022 \quad | 3 \\ -18 \\ \hline 22 \\ -21 \\ \hline 12 \\ 0 \end{array}$$

$$-e^{i\pi} = -(-1) = 1 \quad e^{i\frac{37\pi}{2}} = e^{i(18\pi + \frac{1}{2}\pi)}$$

$$2e^{i\frac{2023\pi}{3}} = 2e^{i(3 \times 674 + 1)\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2e^{i(674\pi + \frac{\pi}{3})} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{1 + i\sqrt{3}}$$



$$\begin{array}{r} 2023 \quad | 3 \\ \cdot \\ \hline 1 \\ \hline 674 \end{array}$$

$$2023 = 3 \times 674 + 1$$

$$(-i)^7 = (-i)^4 (-i)^3 = 1(-i)^2(-i) = -1 \times -i = i$$

$$i^2 = -1 \quad i^4 = 1$$

$$(-i)^7 = (e^{-i\frac{\pi}{2}})^7 = e^{-i\frac{7\pi}{2}} = e^{+i\frac{7\pi + 8\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+2i-1}{4+1} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

$$2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \underline{-\sqrt{3} - i}$$



$$-\cos(x) - i\sin(x) = \cos(x+\pi) + i\sin(x+\pi) = e^{i(x+\pi)}$$

$$e^{ix} - 1 = e^{i\frac{x}{2}} (e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}) = 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$$

$$= \underbrace{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}_{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{x}{2}} = \underline{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\left(\frac{x}{2}\right)}}$$



$$z_2 = 1 + \sqrt{3}i \quad |z_2| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$z_2 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \underline{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2 e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

Les Fractions Rationnelles

I Généralités

C'est quoi? c'est $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes et $Q \neq 0$

$\mathbb{R}(x)$ est l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans \mathbb{R} .

$\mathbb{C}(x)$

(appel: $\mathbb{R}[x]$ est l'ens des polynômes à coef dans \mathbb{R})

ex: $f(x) = \frac{2x^4 + 1}{(x-1)^2(x^2+1)}$

def: les racines de la fraction $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ sont les racines de P

les pôles ————— $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ————— racines de Q

On veut décomposer les fractions rationnelles en éléments simples

ex: On veut intégrer $F(x) = \frac{x}{x^4-1} = \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{\underbrace{(x-1)}_{\text{vert}} \underbrace{(x+1)}_{\text{jaune}} \underbrace{(x^2+1)}_{\text{rouge}}}$

On décompose F en: $F(x) = E(x) + \frac{a}{\underbrace{x-1}_{\text{vert}}} + \frac{b}{\underbrace{x+1}_{\text{jaune}}} + \frac{cx+d}{\underbrace{x^2+1}_{\text{rouge}}}$

partie entière $E(x)$ est un polynôme

a, b, c et d sont des réels

On peut alors intégrer $F(x)$.

Cas général: dénominateur: $Q = A^\alpha \cdot B^\beta \dots N^\gamma$

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{A^\alpha B^\beta \dots N^\gamma} = E(x) + \left(\frac{A_1}{A} + \frac{A_2}{A^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{A^\alpha} \right) + \left(\frac{B_1}{B} + \frac{B_2}{B^2} + \dots + \frac{B_\beta}{B^\beta} \right) + \dots + \left(\frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N^2} + \dots + \frac{N_\gamma}{N^\gamma} \right)$$

où $E(x)$ est un polynôme

les $A_i(x)$ sont des polynômes de degré $< \deg(A)$

les $B_i(x)$ ----- $< \deg(B)$

\vdots

les $N_i(x)$ sont des ----- $< \deg(N)$

ex 2: $F(x) = \frac{x^{37} - 3x + 7}{(x^2 + x + 1)(x-1)^3(x+3)}$

on décomposera F de la manière suivante:

$$F(x) = E(x) + \frac{aX+b}{x^2+x+1} + \left(\frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{e}{(x-1)^3} \right) + \frac{f}{x+3}$$

\nearrow
partie entière

ex3: $f(x) = \frac{x^2+3}{(x^2+x+1)(x-1)^2(x+3)(x-2)^3(x^2+1)^2}$

F se décompose en :

$$F(x) = E(x) + \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \left(\frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} \right) + \frac{e}{x+3} + \left(\frac{f}{x-2} + \frac{g}{(x-2)^2} + \frac{h}{(x-2)^3} \right) + \left(\frac{jx+k}{x^2+1} + \frac{lX+m}{(x^2+1)^2} \right)$$

II la partie entière

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \text{Razors}$$

la partie entière $E(x)$ est le quotient de la division euclidienne de P par Q

Ex1: $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + x + 5}{(x-1)(x+2)} = E(x) + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$

$$\begin{aligned} (x-1)(x+2) &= x^2 + 2x - x - 2 \\ &= x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^2 + x + 5 \\ - (x^4 + x^3 - 2x^2) \\ \hline -x^3 - x^2 + x + 5 \\ - (-x^3 - x^2 + 2x) \\ \hline -x + 5 \end{array}$$

$$x^2 - x$$

$$E(x) = x^2 - x$$

ex2: $F(x) = \frac{3x+2}{(x-1)(x+2)} = E(x) + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$

$$\begin{array}{r|l} 3x+2 & x^2+x-2 \\ \hline & 0 \\ & \uparrow \text{quotient} \\ & 3x+2 \\ & \uparrow \text{reste} \end{array} \quad E(x) = 0$$

donc \square Si le degré des numérateurs est $<$ au degré du dénominateur, alors $E(x) = 0$

III La méthode des caches

Cas général: $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^\alpha \cdot R(x)}$ où $x-a$ ne divise pas $R(x)$.

$$F(x) = E(x) + \left(\frac{a_1}{x-a} + \frac{a_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{a_\alpha}{(x-a)^\alpha} \right) + \left(\text{autres sous } x-a \text{ au dénominateur} \right)$$

$$a_\alpha = \frac{P(a)}{R(a)}$$

Exemple 8 $F(x) = \frac{3x+2}{(x-1)(x+2)} = 0 + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$

Cache pour a : $a = \frac{3x+2}{x+2} \Big|_{x=1}$ ← on a caché $x-1$

$$a = \frac{5}{3}$$

Cache pour b : $b = \frac{3x+2}{x-1} \Big|_{x=-2}$ ← on a caché $x+2$

$$b = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x+2)} = \frac{5/3}{x-1} + \frac{4/3}{x+2}$$

2^{ème} méthode :

pour a : On multiplie par $x-1$: $\frac{3x+2}{x+2} = a + \frac{b(x-1)}{x+2}$

valeur en 1 : $\frac{5}{3} = a + 0$

ex 3: $F(x) = \frac{4}{x^2-1} = \frac{4}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = 0 + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$

• Je multiplie par $x-1$: $\frac{4}{(x+1)(x^2+1)} = a + \frac{b(x-1)}{x+1} + \frac{(cx+d)(x-1)}{x^2+1}$

valeur en $x=1$: $\frac{4}{4} = a + 0 + 0$ $a=1$

• Je multiplie par $x+1$: $\frac{4}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a(x+1)}{x-1} + b + \frac{cx+d}{x^2+1}(x+1)$

valeur en -1 : $\frac{4}{-2 \times 2} = 0 + b + 0$ $b=-1$

• Je multiplie par x^2+1 : $\frac{4}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1}(x^2+1) + \frac{b}{x+1}(x^2+1) + cx+d$

valeur en i : $\frac{4}{(i-1)(i+1)} = 0 + 0 + ci+d$ $\frac{4}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1}$

$\frac{4}{-1-1} = -2 = ci+d \Rightarrow$ $c=0$ et $d=-2$

IV Autres méthodes

- prendre les valeurs en $\pm \infty$
- prendre des valeurs arbitraires (1)
- La parité de F est utile
- On développe et on identifie

ex 4: $F(x) = \frac{16}{(x^2-1)^2} = \frac{16}{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} + \frac{ex+f}{x^2+1} + \frac{gx+h}{(x^2+1)^2}$

Est pair: $F(-x) = F(x) = \frac{a}{-x-1} + \frac{b}{(-x-1)^2} + \frac{c}{-x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} + \frac{-ex+f}{x^2+1} + \frac{-gx+h}{(x^2+1)^2}$

\downarrow
 $a = -c$

$b = d$

$g = -g$
 \downarrow
 $g = 0$

$$F(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} - \frac{a}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} + \frac{f}{x^2+1} + \frac{h}{(x^2+1)^2}$$

$$e = -e \Rightarrow e = 0$$