

done



$$A(0, 4, 1) \quad B(1, 3, 0) \quad C(2, -1, -2) \quad D(7, -1, 4)$$

$$(1) \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (1, -1, -1)$$

$$\vec{AC} = (2, -5, -3)$$

\vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires, donc A, B, C ne sont pas alignés.

$$(2) \quad \Delta \text{ passe par } D \text{ et a pour vecteur directeur } \vec{u}(2, -1, 3)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = (1, -1, -1) \cdot (2, -1, 3) = 2 + 1 + (-3) = 0$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{u} = (2, -5, -3) \cdot (2, -1, 3) = 4 + 5 - 9 = 0$$

\vec{u} est \perp à \vec{AB} et \vec{AC} , donc \vec{u} est \perp au plan (ABC)

$$(22) \quad \begin{array}{c} 2x - y + 3z = d \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{Coord de } \vec{u} \perp \mathcal{P} \end{array}$$

\mathcal{P} passe par A

$$2x_A - y_A + 3z_A = d = 0 - 4 + 3 = -1$$

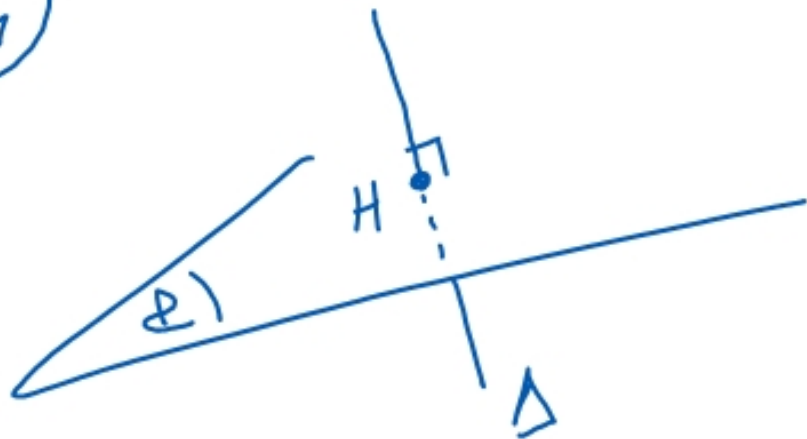
$$\mathcal{P} : 2x - y + 3z = -1$$

(23) eq param de Δ

$$\begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = -t - 1 \\ z = 3t + 4 \end{cases}$$

\uparrow \uparrow
 \vec{u} D

(24)



$$\begin{cases} 2x_H - y_H + 3z_H = -1 \\ x_H = 2t + 7 \\ y_H = -t - 1 \\ z_H = 3t + 4 \end{cases}$$

$$L: 2(2t+7) - (-t-1) + 3(3t+4) = -1$$

$$4t + 14 + t + 1 + 9t + 12 = -1$$

$$14t = -28 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow H \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(3) \mathcal{L}_1 passant par $E(2, 3, -5)$ et $\perp \vec{a} \vec{v}(1, 1, 1)$

$$\mathcal{L}_1: x + y + z = d$$

\mathcal{L}_1 passe par E , donc $2 + 3 - 5 = d \Rightarrow d = 0$

$$\mathcal{L}_1: x + y + z = 0$$

(4) \mathcal{L}_2 de vecteurs directeurs $\vec{a} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ passant par $F \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = 4t & +2 \\ y = -t & -1 \\ z = 0t + t' & +3 \end{cases} \quad \text{ou plan } (P)$$

$$L_1 + 4L_2: x + 4y = 2 - 4 = -2$$

$$\mathcal{L}_2: x + 4y = -2$$

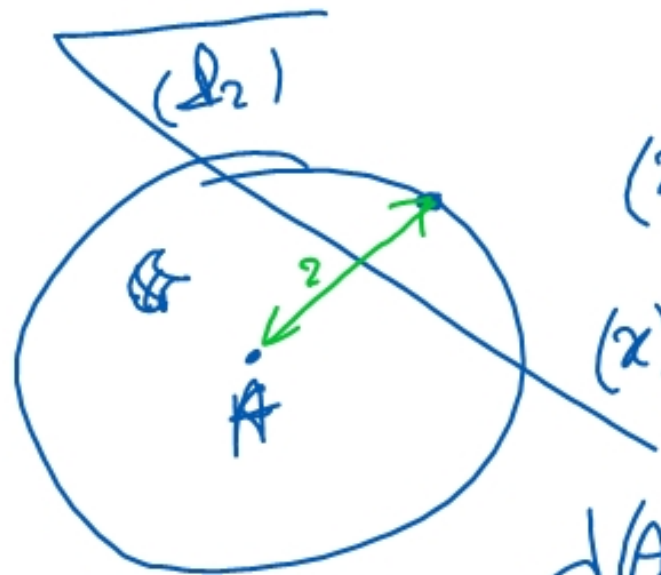
$$d(A, \mathcal{L}_2) = \frac{|x_A + 4y_A + 2|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{18}{\sqrt{17}} = \frac{18\sqrt{17}}{17}$$



$$\text{circle: } (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = R^2$$

$$\sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2} = R$$

$$d(M, c) = R$$



$$(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2 = R^2$$

$$(x)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4$$

$$d(A, Q_2) = \frac{18}{\sqrt{17}} \neq 2$$

$$P_1: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

dim 1

$$L_2 - L_1: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3y - z = -2 \end{cases} \quad L_1 - L_2 \quad |$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \quad \begin{cases} -3y + z = 2 \\ x + 4y = -2 \end{cases} \quad \text{dim} = 1 \quad \rightarrow \text{parameter } y = t$$

$$L_2: x = -2 - 4t \quad L_1: z = 2 + 3t$$

⑨ d a pair vector despace $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{w}$ ABC:

IV Formules de changement de base

$$A' = P^{-1} A P \quad \text{ou} \quad A = P A' P^{-1}$$

$P: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$

\uparrow $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$

\uparrow $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$

def: 2 matrices A et B sont semblables ssi il existe P inversible telle que $B = P^{-1} A P$

ou encore ssi A et B sont les matrices d'un même endomorphisme dans 2 bases différentes

Def: la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable
ssi

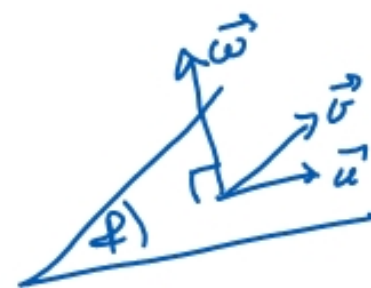
Il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que
 $Q^{-1}AQ$ est diagonale

(càd, on trouve une base dans laquelle la matrice est
diagonale)

ex 3: Symétrie orthogonale / plan d'éq $x - 2y + 3z = 0$

$$\vec{u} = (2; 0; -1) \quad \vec{v} = (2; 1; 0) \quad \vec{w} = (1; -2; 3)$$

$\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3 . $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$



$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

$\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

On veut la matrice de f dans la base \mathcal{B}

$$A = \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(f) \quad A' = \underset{\mathcal{B}'}{\text{Mat}}(f)$$

P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .

$$P = \begin{pmatrix} \text{Coord de} & & \\ \vec{l} & \vec{u} & \vec{w} \\ \text{dans } \mathcal{B} & \text{dans } \mathcal{B} & \text{dans } \mathcal{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On doit calculer P^{-1} : $\left| \begin{array}{l} \text{dans } P, \text{ on a } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ en fonction de } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \\ \text{dans } P^{-1}, \text{ on a } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \text{ en fonction de } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \end{array} \right.$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & 3\vec{u} + \vec{w} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2C_2 + C_3 \\ \\ 3\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} \end{matrix}$$

colonne 3: $14\vec{l} = 3\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} \Rightarrow$

$$\vec{l} = \frac{3}{14}\vec{u} + \frac{2}{14}\vec{v} + \frac{1}{14}\vec{w}$$

colonne 2: $2\vec{c} + \vec{j} = \vec{v} \Rightarrow \vec{j} = \vec{v} - 2\vec{c}$
 $= \vec{v} - \left(\frac{3}{7}\vec{u} + \frac{2}{7}\vec{v} + \frac{1}{7}\vec{w}\right)$

$$\vec{j} = -\frac{3}{7}\vec{u} + \frac{5}{7}\vec{v} - \frac{1}{7}\vec{w}$$

colonne 1 $3\vec{c} - \vec{k} = \vec{u} \Rightarrow \vec{k} = \frac{9}{14}\vec{u} + \frac{6}{14}\vec{v} + \frac{3}{14}\vec{w} - \vec{u}$

$$\vec{k} = -\frac{5}{14}\vec{u} + \frac{6}{14}\vec{v} + \frac{3}{14}\vec{w}$$

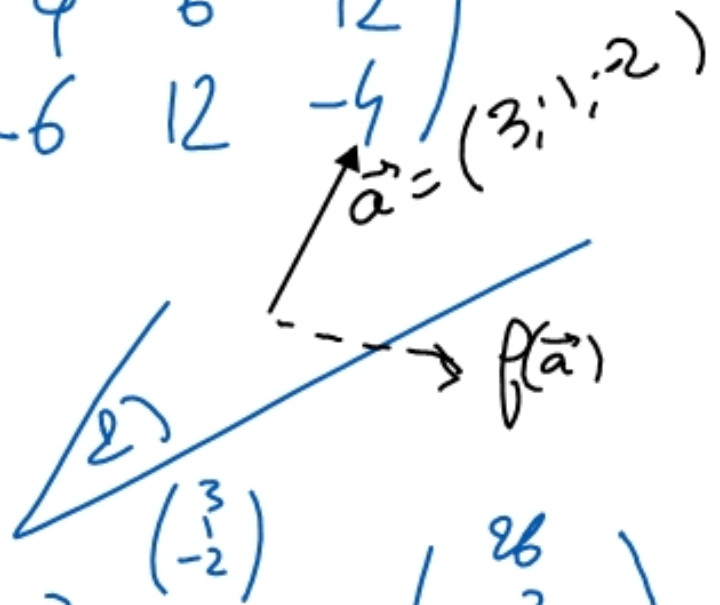
donc

$$\mathcal{L}^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -5 \\ 2 & 10 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \mathcal{L} A' \mathcal{L}^{-1} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -5 \\ 2 & 10 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \leftarrow \text{---} \end{matrix} = \mathcal{L} \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -5 \\ 2 & 10 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -5 \\ 2 & 10 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 12 & 4 & -6 \\ 4 & 6 & 12 \\ -6 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$



$$f(\vec{a}) = A \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 26 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

V Noyau, image et rang

Rappel:
dans \mathbb{R}^3

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \text{Coord de } f(\vec{u}) & f(\vec{u}) & f(\vec{u}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } \mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 $f(\vec{u})$ $f(\vec{v})$ $f(\vec{w})$

matrice : à la fin du pivot,
les colonnes de 0 condensent au moyen de
les autres colonnes donnent l'image

ici, on voit que

$$f(3\vec{u} + \vec{v} - 5\vec{w})$$

$3\vec{u} + \vec{v} - 5\vec{w} \in \text{Ker}(f)$

ex 1: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto (x+y+2z; 2x+6y+8z; 3x+8y+11z)$

Noyau et Image? Rang de f ? (càd $\dim(\text{Im}(f))$)

$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 $f(\vec{i}) = f(1, 0, 0) = (1; 2; 3)$

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k}) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 11 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k}) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\vec{i}) & f(\vec{j}-\vec{i}) & f(\vec{k}-2\vec{i}) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\vec{i}) & f(\vec{j}-\vec{i}) & f(\vec{k}-2\vec{i}) \end{matrix}$

$C_2 - C_3$
 $=$
 $f(\vec{j}-\vec{i}) - f(\vec{k}-2\vec{i})$
 $=$
 $f(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = \vec{0}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f)$

$\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$\text{Im}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$

$\text{rang}(f) = 2$

ex2: $\text{Mat}(f|_B) = A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ Quel est le noyau de $f - 8\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$?

$$\text{Mat}_B(f - 8\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = A - 8I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 9 \\ 3 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

$g(\vec{i}), g(\vec{j}), g(\frac{1}{2}\vec{k})$ $g(\vec{i} + \vec{j}), g(\vec{i} + 2\vec{k}),$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_2 + c_3 = g(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) = \vec{0}$$

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Im}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{rang}(g) = 2$$