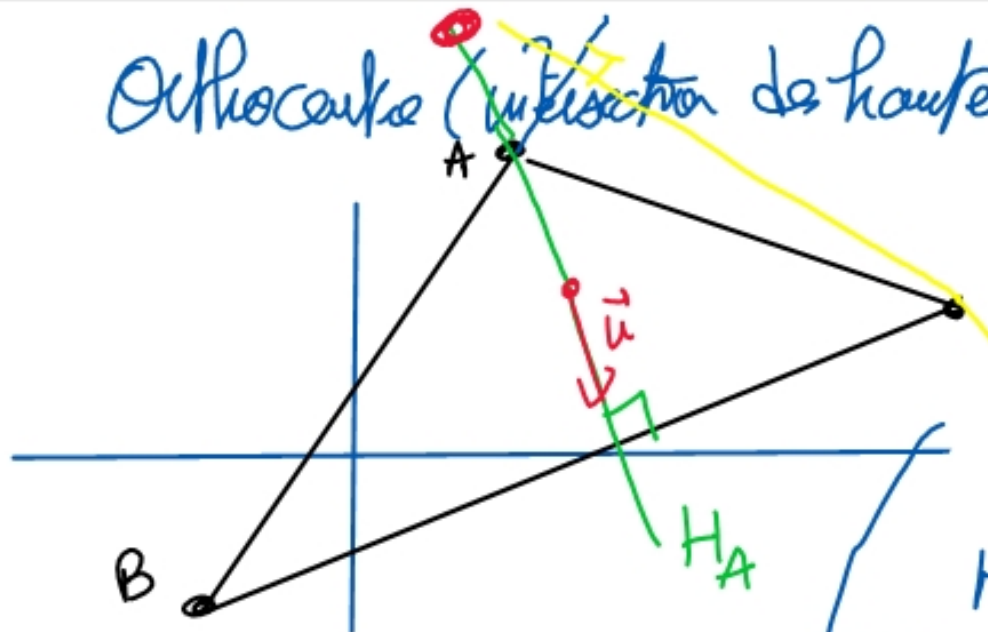


Orthocentre (intersection des hauteurs) de $A(1,2)$ $B(-1,-1)$ $C(4,1)$



hauteur en A
 $\vec{BC} = (5; 2)$

\vec{BC} est \perp à H_A , donc

H_A a pour eq $5x + 2y = c$

Elle passe par A, donc $5 + 4 = c$

$H_A: 5x + 2y = 9$

2^{ème} méthode : avec la pente

$\vec{BC} = (5; 2)$

Un vect \perp à \vec{BC} est $\vec{u} = (-2; 5)$

La pente de H_A est la pente de \vec{u}

$p = -\frac{5}{2}$

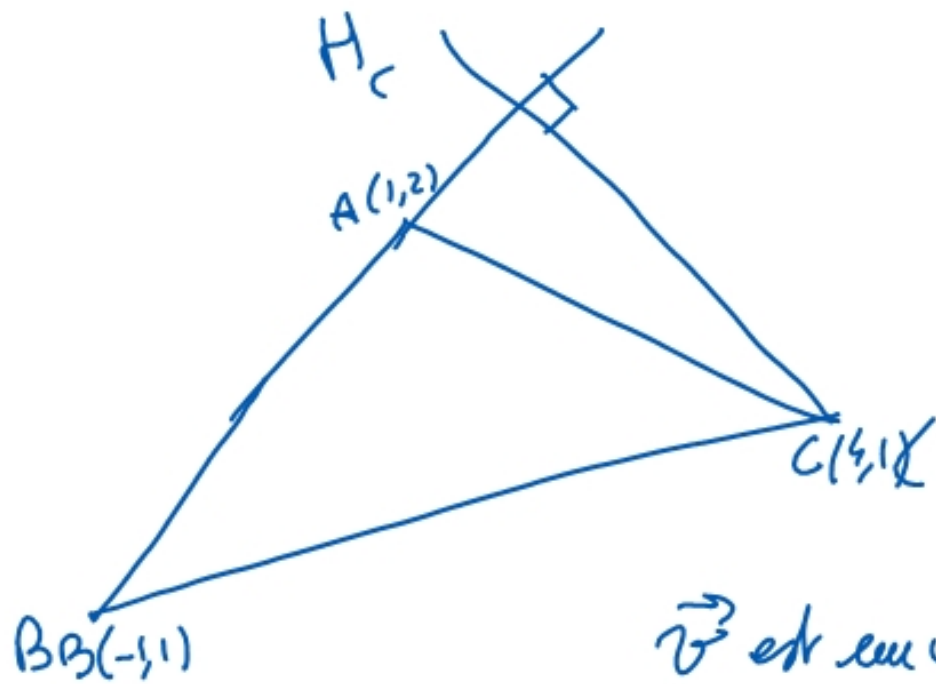
Elle passe par A : $2 = -\frac{5}{2} \cdot 1 + b$

$\Rightarrow b = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$

$\rightarrow H_A: y = -\frac{5}{2}x + b$

$y = -\frac{5}{2}x + \frac{9}{2} \Rightarrow 2y = -5x + 9$

Matrices d'endomorphismes de \mathbb{R}^n



hauteur en C

$$\vec{AB} = (-1, -1) - (1, 2) = (-2, -3)$$

$$\vec{v} = (3, -2) \text{ est } \perp \vec{a} \vec{AB}$$

\vec{v} est un vect directeur de H_c

sa pente vaut $p = -\frac{2}{3}$

$$H_c: y = -\frac{2}{3}x + b$$

elle passe par C: $1 = -\frac{2}{3} \cdot 4 + b \Rightarrow b = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}$

$$H_c: y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

$$3y = -2x + 11$$

$$H_A \left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y = 9 \\ 2x + 3y = 11 \end{array} \right.$$

$$H_C$$

$$3 \cdot 11 - 2 \cdot 2 = 5$$

$$11x = 27 - 22 = 5$$

$$x = \frac{5}{11} \quad \rightarrow y = \frac{37}{11}$$

Matrices d'endomorphismes de \mathbb{R}^n

I) Définition

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de \mathbb{R}^n

La matrice de f dans la base \mathcal{B} s'obtient en mettant dans la 1^{ère} colonne les coordonnées de $f(\vec{e}_1)$ dans \mathcal{B} ; dans la 2^{ème} colonne les coordonnées de $f(\vec{e}_2)$ dans \mathcal{B} ; -- ; dans la dernière colonne les coordonnées de $f(\vec{e}_n)$ dans \mathcal{B} .

Elle se note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ ou $\text{Mat}(f, \mathcal{B})$

ex: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(a, b, c) \mapsto (2a - b + c; a + b - c; 4a + b - c)$$

Quelle est la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 ?

Rappel - la base canonique de \mathbb{R}^3 est $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec
 $\vec{i} = (1, 0, 0)$ $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \text{Coord de } f(\vec{i}) & \text{Coord de } f(\vec{j}) & \text{Coord de } f(\vec{k}) \\ \text{dans } \mathcal{B} & \text{dans } \mathcal{B} & \text{dans } \mathcal{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{i}) = f(1, 0, 0) = (2, 1, 4)$$

$$f(\vec{j}) = f(0, 1, 0) = (-1, 1, 1)$$

$$f(\vec{k}) = f(0, 0, 1) = (1, -1, -1)$$

$$f(1, 2, 3) = (2 \cdot 2 + 3; 1 + 2 - 3; 4 + 2 - 3) = (3; 0; 3)$$

Calcul de $f(\vec{u})$ avec la matrice:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

↑
Coord de \vec{u} dans \mathcal{B}

Pour calculer $f(\vec{u})$ dans une base \mathcal{B} ,
on calcule $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \begin{pmatrix} \text{Coord de} \\ \vec{u} \\ \text{dans } \mathcal{B} \end{pmatrix}$

II Propriétés

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f+g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$$

f et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(af) = a \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}$

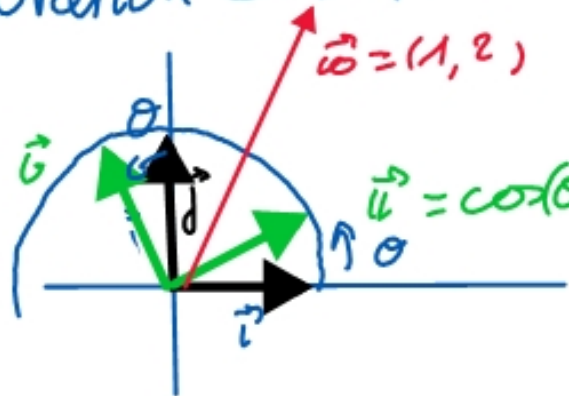
$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \text{I}_n$$

composée : $f \circ g(\vec{u}) = f[g(\vec{u})]$

III Exemples

① Rotation dans \mathbb{R}^2



$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$

$$\vec{u} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v} = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$$

$$f(\vec{i}) = \vec{u} \quad \text{et} \quad f(\vec{j}) = \vec{v}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

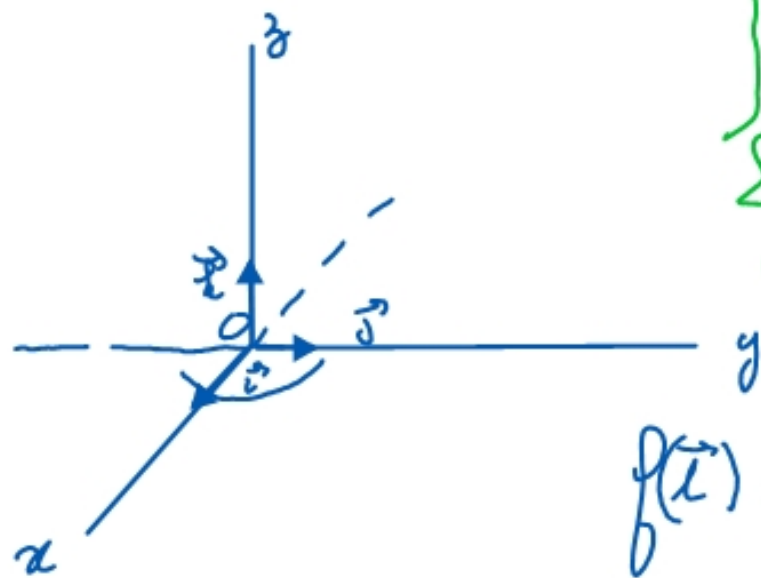
$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Rot d'angle } \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Quelle est l'image de $\vec{w} = (1, 2)$ par la rotation d'angle θ ?

$$f(\vec{w}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta - 2\sin\theta \\ \sin\theta + 2\cos\theta \end{pmatrix}$$

12] Symétrie orthogonale / plan xOy dans la base canonique de \mathbb{R}^3

$$B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ où } \vec{i} = (1, 0, 0) \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$



Σ est le plan passant par O , de vecteurs directeurs \vec{i} et \vec{j}

$$f(\vec{i}) = \vec{i} \quad ; \quad f(\vec{j}) = \vec{j} \quad ; \quad f(\vec{k}) = -\vec{k}$$

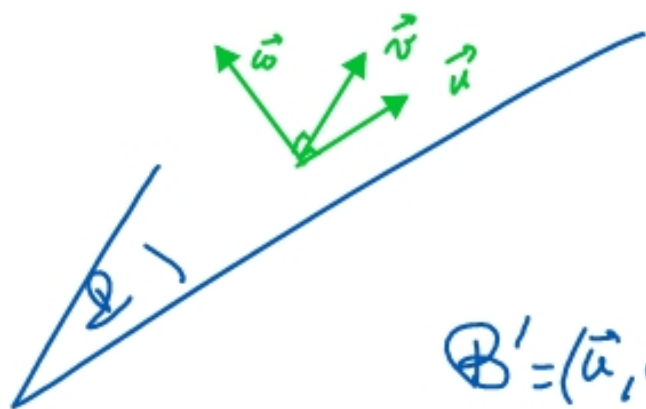
donc $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k}) \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

13) Symétrie Orthogonale / plan d'éq $\mathcal{L}: x - 2y + 3z = 0$

$$\vec{u} = (3; 0; -1)$$

$$\vec{v} = (2; 1; 0) \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \in \mathcal{L}$$

$$\vec{w} = (1, -2, 3) \text{ est } \perp \text{ à } \mathcal{L}$$



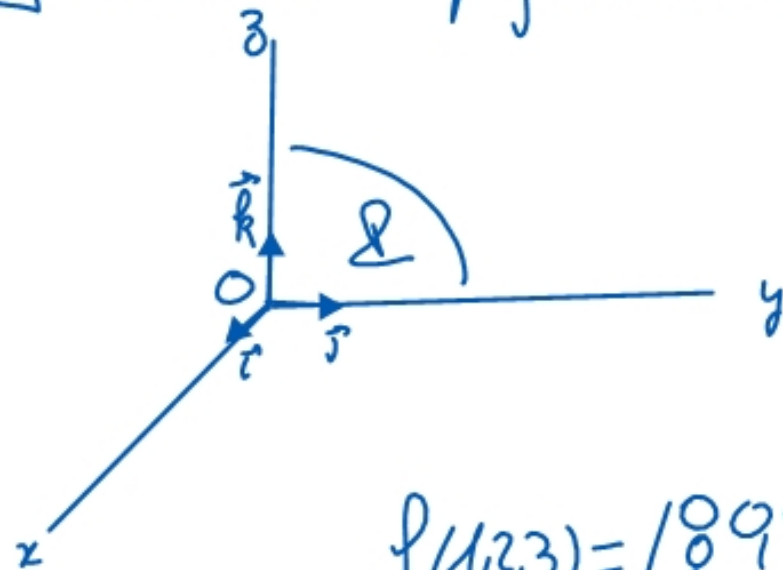
$\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'(\mathcal{B})}(\rho) = \begin{pmatrix} \rho(\vec{u}) \\ \rho(\vec{v}) \\ \rho(\vec{w}) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ -\vec{w} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho) = ?$
 \uparrow
 base canonique de \mathbb{R}^3

14) Matrice de la projection ^{orthogonale} sur le plan yOz



$$f(\vec{i}) = \vec{0} \quad f(\vec{j}) = \vec{j} \quad f(\vec{k}) = \vec{k}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

IV Formule de changement de base

$$A' = P^{-1} A P$$

ou

$$A = P A' P^{-1}$$

où P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}'
 A est la matrice de f dans la base \mathcal{B}
 A' est la matrice de f dans la base \mathcal{B}'