

$$\text{Ker}(f) = \{ \vec{u} \mid f(\vec{u}) = \vec{0} \}$$

① def de  $\text{Ker}(f)$  :  $\vec{u} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0}$

② dessin de  $\arctan(x)$



③ dérivée de  $\arctan(x)$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

④  $\Downarrow$  L de  $\frac{1}{1+x}$  à l'ordre  $n$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + O(x^{n+1})$$

⑤  ~~$\sin(x)$  en fonction~~

$\cos(2x)$  de 2 façons différentes

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$



Rappel. les T des croissances comparées

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^a} = 0 \quad (a > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n^a} = +\infty \quad (a > 0,$$

Nouveau

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left( \frac{n!}{e^n} \right)}_{u_n} = +\infty$$

$$\left[ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{e^{n+1}}}{\frac{n!}{e^n}} = \frac{(n+1)!}{e^{n+1}} \times \frac{e^n}{n!} = \frac{n+1}{e} \right.$$

$$\text{Si } n > 2, \text{ alors } \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{3}{e} > 1 \quad u_{n+1} > \frac{3}{e} u_n$$

$\forall n \geq 2 \quad u_{n+1} > \frac{3}{e} u_n$ , donc  $u_{n+2} > \left(\frac{3}{e}\right)^n u_2 \xrightarrow{+\infty} +\infty$   
 donc  $u_{n+2} \rightarrow +\infty$  ( $\Gamma$  des gendarmes,  $u_2 \rightarrow +\infty$ )

## II les suites arithmétiques

def 1:  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique ssi  $\exists r \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N} \quad \boxed{u_{n+1} = u_n + r}$   
 $r$  s'appelle la raison ou la suite

def 2  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique ssi  $\exists r \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N} \quad \boxed{u_n = u_0 + nr}$

$\square$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \geq 1$$

$\boxed{T_2}$  Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique, alors

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_q = \frac{(u_p + u_q)(q - p + 1)}{2}$$

$q - p + 1$  est le nombre de termes de la somme

ex :  $S = \underbrace{8 + 10 + 12 + \dots + 36}_{k=4} = \sum_{k=4}^{18} 2k$

Il y a  $18 - 4 + 1 = 15$  termes

donc  $S = \frac{(8 + 36) \cdot 15}{2} = 22 \cdot 15 = 330$

### III Suites géométriques

def 1:  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique ssi  $\exists r \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}$   $u_{n+1} = u_n \times r$   
|  
raison

def 2:  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique  $\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}$   $u_n = u_0 \times r^n$

$$\boxed{\text{I}} \quad 1 + r + \dots + r^n = \begin{cases} \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} & \text{qd } r \neq 1 \\ n + 1 & \text{qd } r = 1 \end{cases}$$

ex 1 Calculer  $S = 2^8 + 2^9 + \dots + 2^{17}$

$$S = 2^8 (1 + 2 + \dots + 2^9) = 2^8 \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = \underline{2^{18} - 2^8}$$

ex2: Calcular  $\cos(5x) + \cos(6x) + \cos(7x) + \dots + \cos(34x) = C$

$$\cos \theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$$

$$\text{donc } C = \operatorname{Re} \left( e^{i5x} + e^{i6x} + \dots + e^{i34x} \right)$$

$$= \operatorname{Re} \left( (e^{ix})^5 + (e^{ix})^6 + \dots + (e^{ix})^{34} \right)$$

$$= \operatorname{Re} \left( e^{i5x} (1 + e^{ix} + e^{i2x} + \dots + e^{i29x}) \right)$$

$$= \operatorname{Re} \left( e^{i5x} \frac{e^{i30x} - 1}{e^{ix} - 1} \right) = \operatorname{Re} \left( e^{i5x} \frac{e^{i15x} (e^{i15x} - e^{-i15x})}{e^{ix/2} (e^{ix/2} - e^{-ix/2})} \right)$$

$$= \operatorname{Re} \left( e^{i19,5x} \frac{\cancel{2} \sin(15x)}{\cancel{2} \sin \frac{x}{2}} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{\cos(19,5x) \sin(15x)}{\sin \frac{x}{2}} + i \frac{\sin(19,5x) \sin(15x)}{\sin \frac{x}{2}} \right)$$

$$C = \frac{\cos(19,5x) \sin(15x)}{\sin \frac{x}{2}}$$

## IV Suites adjacentes

def: deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux tend vers 0.

$$\left( \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \\ (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ u_n - v_n \rightarrow 0 \end{array} \right)$$

[T]

Deux suites adjacentes convergent (vers la même limite)



ex:  $u_0 = 1$  ;  $v_0 = 37$        $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$  ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

et       $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$  ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

sup :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ,  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \frac{u_n - 2\sqrt{u_n v_n} + v_n}{2} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \geq 0$$

donc  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n \leq v_n$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n + v_n - 2v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$$

donc  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{u_n v_n}}{u_n} = \sqrt{\frac{v_n}{u_n}} \geq \sqrt{1} = 1 \quad \left( \frac{v_n}{u_n} > 1 \text{ car } u_n \leq v_n \right)$$

$\Rightarrow$   $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante

$\forall n, u_n \leq v_n$  et  $(v_n)$  est décroissante, donc  $v_n \leq v_0 = 37$   
 $\Rightarrow \forall n, u_n \leq 37$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée, donc elle CV.

On appelle  $u$  sa limite

$v_n \geq u_n \geq u_0 = 1$   $(v_n)$  est minorée (par 1)

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée, donc elle CV. On appelle  $v$  sa limite

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2}. \quad n \rightarrow +\infty \quad \text{On obtient} \quad v = \frac{u+v}{2}$$

$$\Rightarrow w = u+v \Rightarrow \boxed{v = u}$$

$$u_n - v_n \xrightarrow{+\infty} u - v = 0$$

$(u_n)$  est croissante

$(v_n)$  est décroissante

$\Rightarrow$  les suites sont adjacentes

V Suites de type  $a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0$

⌈ T ⌋  $P(x) = ax^2 + bx + c$  est le polynôme caractéristique associé.

Si  $\Delta > 0$ : 2 racines  $\alpha$  et  $\beta$ .

$$u_n = A \alpha^n + B \beta^n$$

(appel:  $(\alpha^n)_{n \geq 0}$  et  $(\beta^n)_{n \geq 0}$  sont géométriques)

$A$  et  $B \in \mathbb{R}$

Si  $\Delta = 0$ : 1 racine double  $\alpha$

$$u_n = (A n + B) \alpha^n$$

Si  $\Delta < 0$ : 2 racines  $\pi e^{\pm i\theta}$

$$u_n = r^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$$

ex 1 :  $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$ ,  $\forall n > 0$  et  $u_0 = 37$  et  $u_1 = -1$

Trouver  $u_n$  !

$$u_{m+1} = u_m + 2u_{m-1}, \forall m > 0 \Leftrightarrow u_{m+2} = u_{m+1} + 2u_m, \forall m \geq 0$$

(pour  $n=1$  :

$$u_2 = u_1 + 2u_0$$

pour  $n=0$

$$u_2 = u_1 + 2u_0$$

$$\Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0$$

$$P(x) = x^2 - x - 2$$

$$\Delta = 9$$

$$2 \text{ racines : } \frac{1 \pm 3}{2} = < -1$$

$$\Rightarrow \underline{u_n = A2^n + B(-1)^n}$$

$$\begin{cases} u_0 = 37 = A + B \\ u_1 = -1 = 2A - B \end{cases}$$

$$L_1 + L_2 : 3A = 36 \Rightarrow A = 12$$

$$L_1 : B = 37 - A = 37 - 12 = 25$$

$$u_n = 12 \cdot 2^n + 25(-1)^n$$

$$z_1 = 1 - i$$

$$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$



$$z_1 = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

$$\begin{aligned} (z_1)^7 &= \left( \sqrt{2} e^{-i\pi/4} \right)^7 = \left( 2^{1/2} \right)^7 e^{-i\frac{7\pi}{4}} \\ &= 2^{7/2} e^{-i\frac{7\pi}{4} + i2\pi} \end{aligned}$$

$$= 2^{3 \cdot 1/2} e^{i\pi/4} = 8\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 8(1+i) = 8+8i$$

$$8\sqrt{2} e^{i\pi/4}$$