

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{t-1} \\ y(t) = \frac{e^t}{t-1} \end{cases}$$

$$D_B = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\textcircled{1} \quad \lim_{t \rightarrow 1} x(t) = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{et } y \rightarrow \frac{e^1}{0} = +\infty$$

$$a = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\frac{e^t}{t-1}}{\frac{t^2}{t-1}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{e^t}{t^2} = \underline{e}$$

$$b = \lim_{t \rightarrow 1} (y - ex)$$

$$y - ex = \frac{e^t}{t-1} - e \frac{t^2}{t-1} = \frac{e^t - et^2}{t-1} \rightarrow \frac{0}{0} \quad \text{f. \u221a}$$

$$\text{chgt } \tau = t-1 \rightarrow t = \tau+1$$

$$y - ex = \frac{e^{\tau+1} - e(\tau+1)^2}{\tau} = \frac{e^\tau \cdot e - e(\tau^2 + 2\tau + 1)}{\tau} = \frac{e(1 + \tau + \frac{\tau^2}{2} + o(\tau^3)) - e(\tau^2 + 2\tau + 1)}{\tau}$$

$$= \frac{\cancel{e} + e\tau + e\frac{\tau^2}{2} - e\tau^2 - 2e\tau - \cancel{e}}{\tau} = \frac{e\tau - \frac{e}{2}\tau^2 + o(\tau^3)}{\tau} = -e - \frac{e}{2}\tau + o(\tau)$$

$$y - ex = -e - \frac{e}{2}T + o(T) \xrightarrow{T \rightarrow 0} -e = b \quad \text{Asymptote } \boxed{y = ex - e}$$

$$y - ex + e = -\frac{e}{2}T + o(T) \xrightarrow{T \rightarrow 0^+} 0^- \quad \text{Courbe en dessous en } 1^+$$

$$\xrightarrow{T \rightarrow 0^-} 0^+ \quad \text{Cbe au dessus en } 1^-$$

$$\textcircled{2} \quad x(t) = \frac{t^2}{t-1} \quad x'(t) = \frac{2t(t-1) - t^2 \times 1}{(t-1)^2} = \frac{t^2 - 2t}{(t-1)^2} = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$

x' s'annule en 0 et en 2

$$y(t) = \frac{e^t}{t-1} \quad y'(t) = \frac{e^t(t-1) - e^t \times 1}{(t-1)^2} = \frac{e^t(t-2)}{(t-1)^2}$$

y' s'annule en 2

$$\textcircled{3} \quad M(0) = (x(0), y(0)) = (0; -1)$$

$$\vec{T}(0) = (x'(0), y'(0)) = (0; -2) \quad \text{vertical}$$

④ en $t \rightarrow 2$ $M(2) = \left(\frac{4}{1}; \frac{e^2}{1} \right) = (4; e^2)$

La pente en 2 vaut $\frac{y'(2)}{x'(2)} = \frac{0}{0}$ ou plutôt $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{y'(t)}{x'(t)}$

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\frac{e^t(t-2)}{(t-1)^2}}{\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}} = \frac{e^t(t-2)}{t(t-2)} \xrightarrow{t \rightarrow 2} \frac{e^2}{2}$$

⑤ $t \rightarrow -\infty$ $x(t) = \frac{t^2}{t-1} \sim \frac{t^2}{t} = t \rightarrow -\infty$

$$y(t) = \frac{e^t}{t-1} \xrightarrow{-\infty} \frac{0}{-\infty} = 0$$

asymptote $y=0$

⑥ en $+\infty$ $x(t) \sim \frac{t^2}{t} = t \rightarrow +\infty$ $y(t) = \frac{e^t}{t-1} \sim \frac{e^t}{t}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \quad (\text{TCC})$$

⚠ $AB = AC$ n'implique pas $B = C$
 $AB = 0$ ————— $A = 0$ ou $B = 0$

ex: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ A \text{ est inversible} \end{array} \right\}$ alors $A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$
 $\Rightarrow I_n B = I_n C$
 $\Rightarrow B = C$

II Inverse d'une matrice

def: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est invertible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que
 $A \times B = I_n$

Si A est invertible, on note A^{-1} son inverse
et

$$A \times A^{-1} = I_n \quad \text{et} \quad A^{-1} \times A = I_n$$

Inverse d'une matrice 2-2: L'inverse de $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est

Il faut que le
determinant de A : $ad - bc$
soit $\neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

determinant de A

Inverse d'une matrice 3-3: exemple avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est la base canonique de \mathbb{R}^3

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_B \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

Dans A , il y a les coordonnées de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Dans A^{-1} , on aura les coordonnées de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en fonction de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

on utilise la méthode des pivots

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u} \\ 2\vec{u} - \vec{v} \\ 3\vec{u} - \vec{w} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u} \\ 5\vec{u} - 4\vec{v} \\ 5(2\vec{u} - \vec{v}) - 4(3\vec{u} - \vec{w}) \end{matrix}$$

$\boxed{-2\vec{u} - 5\vec{v} + 4\vec{w}}$

Colonne 3: $\vec{k} = -2\vec{u} - 5\vec{v} + 4\vec{w}$

donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} ? & ? & -2 \\ ? & ? & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Verif.

\vec{k}

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \hline \hline \hline \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \text{ok} \\ \downarrow \\ 0 \\ \text{ok} \\ 0 \\ \text{ok} \\ 1 \\ \text{ok} \end{matrix}$

On peut continuer

Colonne 2: $\vec{j} - 3\vec{k} = 2\vec{u} - \vec{v} \Rightarrow \vec{j} = 2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{k}$

$$= 2\vec{u} - \vec{v} + 3(-2\vec{u} - 5\vec{v} + 4\vec{w})$$

$$= -4\vec{u} - 16\vec{v} + 12\vec{w}$$

$\Rightarrow \vec{j} = -4\vec{u} - 16\vec{v} + 12\vec{w}$

VERIF (en noir)
(en haut)

Colonne 1: $\vec{l} + 2\vec{y} - \vec{k} = \vec{u}$

$$\Rightarrow \vec{l} = \vec{u} - 2\vec{y} + \vec{k} = \vec{u} - 2(-\vec{u} - 4\vec{v} + 3\vec{w}) + (-2\vec{u} - 5\vec{v} + 4\vec{w})$$

$$\vec{l} = \vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{w}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & -5 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

III Matrice de passage

def: La matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ à la base $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1; \vec{e}'_2; \dots; \vec{e}'_n)$ s'obtient en mettant dans la 1^{ère} colonne les coordonnées de \vec{e}'_1 dans \mathcal{B} , dans la 2^{ème} colonne les coord de \vec{e}'_2 dans \mathcal{B} , ... , dans la dernière colonne les coord de \vec{e}'_n dans \mathcal{B}

On la note $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$

ex dans \mathbb{R}^3 :

$$\text{Si } \mathcal{B}' = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \quad \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \text{Coord} & \text{Coord} & \text{Coord} \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \text{dans } \mathcal{B} & \text{dans } \mathcal{B} & \text{dans } \mathcal{B} \end{pmatrix}$$

Coord des vecteurs de la 2^{ème} base en fonction de la 1^{ère} base

Ainsi

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \text{en colonne, } \mathcal{B} \text{ coord} \\ \text{des vecteurs de } \mathcal{B} \\ \text{en fonction des} \\ \text{vecteurs de } \mathcal{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ \mathcal{B}' & \mathcal{B}' & \mathcal{B}' \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

prop.

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = \mathbb{I}_n$$

Formule de changement de base :

$$X = \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} X'$$

Coord de \vec{x} dans \mathcal{B}

Coord de \vec{x} dans \mathcal{B}'

$$X' = \mathcal{P}_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} X$$