

①. $\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \sim \ln\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car ...

$$\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2}\right) = \underbrace{\ln(1+t^2)}_{\substack{t \rightarrow 0 \\ 0}} - \underbrace{\ln(t^2)}_{\substack{\downarrow \\ -(-\infty)}} \sim \underline{\ln(t^2)}$$

$$\frac{\ln(1+t^2) - \ln(t^2)}{-\ln(t^2)} = \left(-\frac{\ln(1+t^2)}{\ln(t^2)} \right) + 1 \rightarrow 0 + 1$$

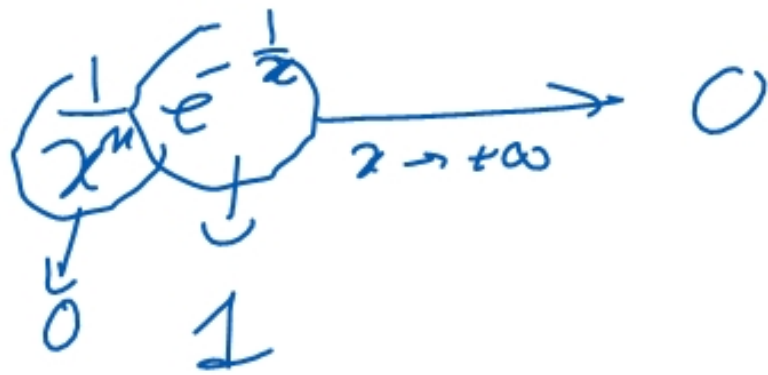
$\downarrow \frac{0}{\infty} = 0$

• $\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \sim ?$

$$\frac{1}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$\ln(1+x) = x + o(x)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \sim \underline{\frac{1}{t^2}}$$



$$\frac{\frac{1}{x^n} e^{-1/x}}{\frac{1}{x^n}} = e^{-1/x} \rightarrow 1 \quad \text{bec} \quad \frac{1}{x^n} e^{-1/x} \sim \frac{1}{x^n}$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx \quad \text{chyt} \quad X = x^2+1 \quad \frac{dX}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dX}{2x}$$

$$\int \frac{x}{X^2} \frac{dX}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{X^2} dX = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{X} \right) = -\frac{1}{2(x^2+1)}$$

$$\text{con} \quad \int X^\alpha dx = \frac{X^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$I = \int x \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

I.P.P

$$\left| \begin{array}{l} u = x \\ u' = \frac{x}{(x^2+1)^2} \end{array} \right.$$

$$u' = 1$$

$$v = -\frac{1}{2(x^2+1)}$$

Q d'avant

$$= \left[-\frac{x}{2(x^2+1)} \right] + \int \frac{1}{2(x^2+1)} dx$$

$$= -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan(x) + \text{cste}$$

$$f(a\vec{u} + b\vec{v}) = a f(\vec{u}) + b f(\vec{v})$$

$$\vec{u} \in \ker(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ x+ly=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

$$\boxed{+} \quad \ker(f) = \{ \vec{0} \} \quad \text{et donc } f \text{ est injective}$$

T de rang: $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^2)$
 $0 \qquad \qquad \qquad 2 \uparrow$ axes de départ

$\dim(\text{Im}(f)) = 2$
 $\text{Im}(f)$ est un plan de \mathbb{R}^3
 \Rightarrow $\text{Im}(f)$ est un plan de \mathbb{R}^3
 lequel?

$f(1,0) = (1,1,1) = \vec{a}$
 $f(0,1) = (1,-1,2) = \vec{b}$

$\text{Im}(f) = \text{Vect}(\vec{a}, \vec{b})$

$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$3x - y - 2z = 0$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $3 \quad -1 \quad -2$

$\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, donc f n'est pas surjective (pas bijective)

$$(*) \quad f(x) = (2x-1)e^x \quad f'(x) = 2e^x + (2x-1)e^x = (2x+1)e^x$$

10' cases $f^{(n)} = (2x + 2n - 1)e^x$

Initialisation. Pour $n=1$ $f'(x) = (2x+1)e^x = (2x + 2 \cdot 1 - 1)e^x$

Hérédité. Je prends un $n \geq 1$. Je suppose que $f^{(n)}(x) = (2x + 2n - 1)e^x$ OUI

On dérive : $f^{(n+1)}(x) = 2 \cdot e^x + (2x + 2n - 1)e^x = (2x + 2n - 1 + 2)e^x$

$$f^{(n+1)}(x) = (2x + 2(n+1) - 1)e^x \quad \text{OK}$$

Conclusion : $\forall n \geq 1, f^{(n)}(x) = (2x + 2n - 1)e^x$

d'après le principe de récurrence

$$(7) \sin^3(x) \cos x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)$$

$$= -\frac{1}{8i} \frac{1}{2} (e^{i3x} - 3e^{2ix} \cdot e^{-ix} + 3e^{ix} \cdot e^{-i2x} - e^{-i3x}) (e^{ix} + e^{-ix})$$

$$= -\frac{1}{16i} (e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}) (e^{ix} + e^{-ix})$$

$$= -\frac{1}{16i} (e^{i4x} - 3e^{i2x} + 3e^{-i2x} - e^{-i4x} + e^{i2x} - 3e^{-i2x} + e^{-i4x})$$

$$= -\frac{1}{16i} \left(\underbrace{(e^{i4x} - e^{-i4x})}_{2i \sin(4x)} - 2 \underbrace{(e^{i2x} - e^{-i2x})}_{2i \sin(2x)} \right)$$

$$\begin{cases} x + y + az = a \\ x + ay - z = 1 \\ \boxed{x} + y - z = 1 \end{cases} \xrightarrow{L_1 - L_3, L_2 - L_3} \begin{cases} (a+1)z = a-1 \\ (a-1)y = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

1^{er} cas: $a = -1$ $L_1: 0 = -2$ impossible $\mathcal{S} = \emptyset$

2^{er} cas: $a = 1$ $\begin{cases} z = 0 \\ 0 = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ 2 eq, 3 inconnues
 lin 1.

1 paramètre $x = t \Rightarrow y = 1 - t \quad z = 0 \quad \mathcal{S} = \{(t; 1-t; 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$

3^{er} cas: $a \neq \pm 1$ $\begin{cases} z = \frac{a-1}{a+1} \\ y = 0 \\ x = 1 - y + z = 1 + \frac{a-1}{a+1} - \frac{a-1}{a+1} = \frac{2a}{a+1} \end{cases}$

$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{2a}{a+1}; 0; \frac{a-1}{a+1} \right) \right\}$

Matrices

I Généralités

notations : $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices à coefficients dans \mathbb{R} ayant p lignes et q colonnes

$\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ — — — \mathbb{C}

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ens — \mathbb{R}
ayant n lignes et n colonnes

Une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ se note $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & & & \\ a_{p,1} & a_{p,2} & & a_{p,q} \end{pmatrix}_{p,q}$$

Somme de deux matrices de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$:

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$, alors

$$A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$$

ex: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & \pi & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & \pi & 6 \end{pmatrix}$

Produit d'un scalaire et d'une matrice:

ex: $2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

notation: O désigne la matrice nulle

note: $M_{pq}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension $p \times q$

produit entre matrices :

$$\text{ex: } (1 \ 2 \ 3) \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + 3 \times 4 \\ = 12$$

$\in M_{1,3}(\mathbb{R})$ $\in M_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times (1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 & 2 \times 3 \\ -1 \times 1 & -1 \times 2 & -1 \times 3 \\ 4 \times 1 & 4 \times 2 & 4 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

En pratique, pour calculer $A \times B$, on écrit A ^B

ex1: $A = (1 \ 2 \ 3)$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$A \times B = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + 3 \times 4 = 12$$

ex2:

$$B \times A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \times 2 & 2 \times 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 4 \times 2 & 4 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

ex3: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times (2 \ 3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \cdot (2 \ 3) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$

ex4 $(2 \ 3) \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = (2 \ 3) \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \end{array} \quad ?? \text{ Impossible}$

Ainsi, on peut calculer $A \times B$, lorsque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B

$\left(\begin{array}{l} \text{Si } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \text{ et } B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq q \\ 1 \leq k \leq r}} \text{, alors } A \times B = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq k \leq r}} \\ \text{et } c_{ik} = \sum_{j=1}^q a_{ij} b_{jk} \end{array} \right)$

notion: $\mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\forall i, a_{i,i} = 1$ et si $i \neq j$ $a_{i,j} = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \mathbb{I}_3$

ex $(1 \ 2 \ 3) \cdot \cdot \cdot = (1 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 0 \quad 0 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 0 \quad 0 + 0 + 3)$
 $= (1 \ 2 \ 3)$

$(1) \begin{matrix} (1 & 2 & 3) \\ | & | & | \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{matrix} = (1 \ 2 \ 3)$
 \uparrow
 \mathbb{I}_1

$\mathbb{I}_n \times A = A \wedge \mathbb{I}_n = A$

$0 + A = A + 0 = A$

Traduction matricielle d'un système

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y - z \\ x - y + 2z \\ x + y - z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = 3 \\ x + y - z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ce système se traduit par $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Transposée : Pour trouver la transposée de A , on intervertit les lignes et les colonnes

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ alors $\overset{\text{transposée de } A}{A^t} = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq q \\ 1 \leq i \leq p}}$

ex1. ${}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

ex2. ${}^t \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

ex3. ${}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$${}^t(1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

proprietés: $A(B+C) = AB+AC$

$$(A+B)C = AC+BC$$

⚠ $AB \neq BA$ en general