

$$\boxed{3} \quad g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (x+y-z, x+2y) \end{array} \right.$$

on prends $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$
et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$g(a\vec{u} + b\vec{v}) = g \left(\begin{array}{l} (ax, ay, az) \\ a\vec{u} \end{array} + \begin{array}{l} (bx', by', bz') \\ b\vec{v} \end{array} \right) = g \left(\begin{array}{l} \underline{ax+bx'} \\ \underline{ay+by'} \\ \underline{az+bz'} \end{array} \right)$$

$$= (x+y-z; x+2y)$$

$$= (ax+bx'+ay+by'-az+bz'; ax+bx'+2ay+2by')$$

$$= (ax+ay-az; ax+2ay) + (bx'+by'-bz'; bx'+2by')$$

$$= a(x+y-z; x+2y) + b(x'+y'-z'; x'+2y')$$

$$= a g(\vec{u}) + b g(\vec{v})$$

donc g est linéaire

$$\vec{u} (x, y, z) \in \text{ker}(g) \Leftrightarrow g(\vec{u}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (x+y-z; x+2y) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

2 eq et 3 inconnues, donc 1 paramètre.
On pose $y=t \Rightarrow x=-2t$

$$\therefore z = x+y = -2t+t = -t \quad \text{ker}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ -t \end{pmatrix} \text{ où } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$= \text{Vect}(\vec{a}) \quad \text{où } \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\text{ker}(g) \neq \{ \vec{0} \}$ donc g n'est pas injective

$$\text{Th du rang: } \dim(\text{ker}(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = \dim(\mathbb{R}^3)$$
$$1 + 2 = 3$$

$\text{Im}(g)$ est un sous-espace de \mathbb{R}^3
 $\dim(\text{Im}(g)) = 2$) donc $\text{Im}(g)$ est un plan de \mathbb{R}^3
 $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^2$

$$3e^{i\pi/2} = 3i$$

$$2e^{i\pi/3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2}e^{-i\pi/4} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i$$

$$4e^{i5\pi/6} = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i$$

$$3e^{i\pi} = -3 = 3e^{-i\pi}$$

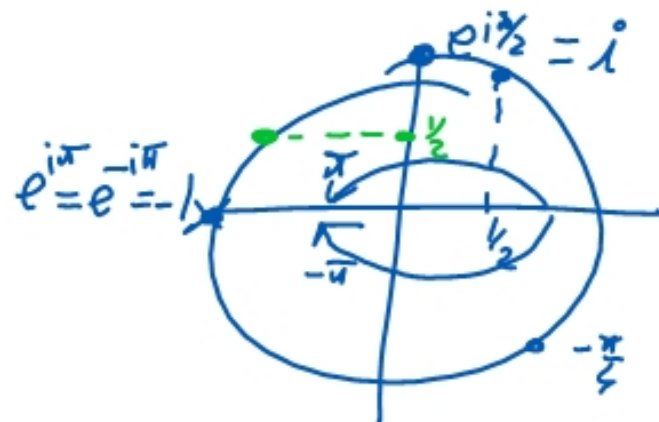
$$2e^{i7\pi/3} = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{3} - 2\pi\right)} = 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$$

$$2e^{i2017\pi/3}$$

$$\begin{array}{r} 2017 \quad | \quad 3 \\ -18 \quad | \quad 672 \\ \hline 21 \quad | \quad \\ -24 \quad | \quad \\ \hline 07 \quad | \quad \\ -6 \quad | \quad \\ \hline 1 \quad | \end{array}$$

$$2017 = 3 \times 672 + 1$$

$$2e^{i2017\pi/3} = 2e^{i\frac{3 \times 672 + 1}{3}\pi} = 2e^{i672\pi + i\pi/3} = 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$$



$$-i^7 = -i^{4 \cdot 3} \\ = -1 \cdot (i) = i$$

$$i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1$$

Rappel: $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$$\frac{2+i}{3-4i} = \frac{(2+i)(3+4i)}{9+16} = \dots$$

$$2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\frac{1+e^{ix}}{1-e^{ix}}$$

$$= \frac{\cancel{e^{ix/2}} (e^{-ix/2} + e^{ix/2})}{\cancel{e^{ix/2}} (e^{-ix/2} - e^{ix/2})}$$

$$= -\frac{\cos(x/2)}{i \sin(x/2)} \cdot \frac{x i}{i}$$

$$-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= -\frac{\cos(x/2) i}{-i \sin(x/2)} = i \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ i^2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$-7 = 7e^{-i\pi}$$

$$-\frac{1}{3}i = \frac{1}{3}e^{-i\pi/2}$$



$$12+5i = z \quad |z| = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

$$z = 13 \left(\frac{12}{13} + \frac{5}{13}i \right) = \underline{13} e^{i\theta} \quad \text{ou} \quad \theta = \underline{\arctan\left(\frac{5}{12}\right)}$$

$$\underbrace{-z e^{i\pi/6}}_{\uparrow} = e^{-i\pi} \cdot z e^{i\pi/6} = z e^{i\frac{-6+1}{6}\pi} = z e^{-i\frac{5\pi}{6}} \quad (= z e^{i\frac{7\pi}{6}})$$

$$\sqrt{3} - i = z \quad |z| = \sqrt{3+1} = 2$$



$$z = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2 e^{-i\pi/6}$$

$$\left(\frac{1}{z}\right)^7 = \left(\frac{1}{2e^{-i\pi/6}}\right)^7 = \frac{1}{2^7} \left(e^{i\pi/6}\right)^7 = \frac{1}{128} e^{i\frac{7\pi}{6}} = \frac{1}{128} e^{i\frac{7\pi}{6} - 2\pi} = \frac{1}{128} e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{1-i} \frac{x/1+i}{1+i} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\pi/4}$$

$$1 + e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}} (e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}}) = \underbrace{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}_{\text{modul}} e^{i\frac{x}{2}} \quad \downarrow \text{argument}$$

$$\cos x - i \sin x = \cos(-x) + i \sin(-x) = e^{-ix}$$

$$\sin x + i \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$



Polynômes à coefficients dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}

① Polynômes de degré 2

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$2 \text{ racines : } \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

si $\Delta > 0$: 2 racines
si $\Delta = 0$: 1 racine double
si $\Delta < 0$: pas de racine dans \mathbb{R}

$P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines

Factorisation dans \mathbb{R} : $P(x) = 2x^2 - 4x - 6$

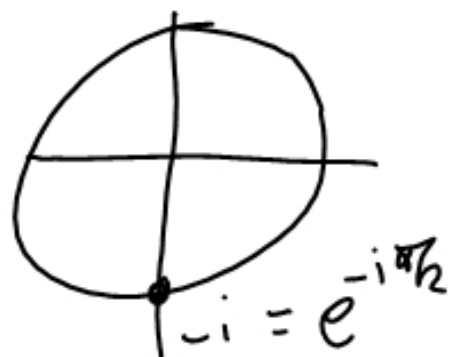
$$\Delta = 16 + 48 = 64 = 8^2 \quad 2 \text{ racines : } \frac{4 \pm 8}{4} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 2(x-3)(x+1)$$

$\boxed{\text{II}} \quad a \text{ est racine de } P(x) \iff \text{on peut factoriser par } x-a$

factoriser dans \mathbb{C} :
$$f(x) = 3x^2 + (3-9i)x - 6-3i$$

$$= 3(x^2 + (1-3i)x - 2-i)$$



$$\Delta = (1-3i)^2 + 4(2+i)$$

$$= 1 - 6i - 9 + 8 + 4i = -2i$$

II] les racines carrées de $Re^{i\theta}$ sont $\pm \sqrt{R}e^{i\theta/2}$

$$\Delta = 2e^{-i\pi/2}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1-i$$

2 racines:
$$\frac{-(1-3i) \pm (1-i)}{2}$$

$$\frac{-1+3i+1-i}{2} = \frac{2i}{2} = i \quad \text{et} \quad \frac{-1+3i-1+i}{2} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$$

$$3x^2 + (3-9i)x - 6-3i = 3(x-i)(x+1-2i)$$

II Généralités

notation : L'ensemble des polynômes à coefficient dans R se note $R[X]$

\mathbb{C} se note $\mathbb{C}[X]$

On dit que $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ est un polynôme de degré n quand $a_n \neq 0$

L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n se note $\mathbb{R}_n[X]$ ou $\mathbb{C}_n[X]$

Division Euclidienne

$\forall A \neq 0 \quad B \in \mathbb{R}[X]$. Il existe un unique couple (Q, R) tel que

$$\left. \begin{array}{l} B = AQ + R \\ \deg R < \deg A \end{array} \right\}$$

quotient reste
↓ ↓

ex1. on divise $B = X^5 + 2X^3 - 3X - 2$ par $A = X^3 + X + 1$

$$\begin{array}{r|l} X^5 + 2X^3 - 3X - 2 & X^3 + X + 1 \\ - (X^5 + X^3 + X^2) & X^2 + 1 \\ \hline X^3 - X^2 - 3X - 2 & \\ - (X^3 + X + 1) & \\ \hline -X^2 - 4X - 3 & \end{array}$$

$$X^5 + 2X^3 - 3X - 2 = (X^3 + X + 1)(X^2 + 1) - X^2 - 4X - 3$$

ex2 Quel est le reste de la division Euclidienne de $P(X) = X^n + X + 1$ par $X - 1$?

\square Il existe un unique couple (Q, R) tel que

$$\begin{cases} X^n + X + 1 = (X - 1)Q(X) + R(X) \\ \deg(R) < \deg(X - 1) = 1 \Rightarrow R = \text{cste} \end{cases}$$

valeurs en 1 dans L : $1^n + 1 + 1 = 0 \cdot Q + R \Rightarrow R(X) = 3$

ex 3: Reste de la division Euclidienne de $(X-2)^{2022} + (X-1)^{1011} + 1$ par $(X-1)(X-2)$?

$$(X-2)^{2022} + (X-1)^{1011} + 1 \quad | \quad X^2 - 3X + 2$$

$$\Downarrow$$

$$\textcircled{R(X)}$$

$$\overset{2020}{X} \quad \textcircled{Q(X)}$$

\exists il existe un unique couple (Q, R) tel que

$$(X-2)^{2022} + (X-1)^{1011} + 1 = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + R(X)$$

$$\left. \begin{array}{l} \deg(R(X)) < 2 \end{array} \right\} \Rightarrow R(X) = aX + b$$

valeurs en 1 : $(1-2)^{2022} + (1-1)^{1011} + 1 = 0 + a + b$

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 2 \end{array} \right\}$$

valeurs en 2 : $(2-2)^{2022} + (2-1)^{1011} + 1 = 0 + 2a + b$

$$\left. \begin{array}{l} 2a + b = 2 \end{array} \right\}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \left. \begin{array}{l} a + b = 2 \\ a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow b = 2$$

$$\boxed{R(X) = 2}$$

def: a est une racine de P lorsque $P(a) = 0$

\square : a est racine de $P \Leftrightarrow$ On peut factoriser P par $x-a$
ou encore

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X] / P(x) = (x-a)Q(x)$$

def: La multiplicité d'une racine a du polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$
est le plus grand entier n tel que " P se factorise par $(x-a)^n$ "
ou encore

$$\exists Q / P(x) = (x-a)^n Q(x)$$

ex: $P(x) = 8x^3(x-2)^7(x+5)^2$

P a trois racines: 0 ; 2 ; et -5

0 est de multiplicité 3

2 _____ 7
 -5 _____ 2

on dit aussi que -5 est une
racine double

III Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ ou dans $\mathbb{C}[X]$.

$\boxed{T_1}$

Tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ se décomposent en produits de polynômes de degré 1

$\boxed{T_2}$

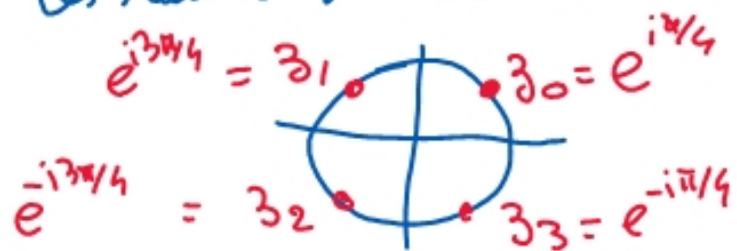
Tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ se décomposent en produits de polynômes de degré 1 et de polyn de degré 2 dont le discriminant est $\Delta < 0$.

ex 1: $X^4 + 1 = \delta(x)$

Il n'a pas de racines dans \mathbb{R} car $\delta(x) > 1 > 0$

dans \mathbb{C} , il a 4 racines: $X^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow X^4 = -1 = e^{i\pi}$

les racines 4^{ième} de $-1 = e^{i\pi}$ sont les $z_k = e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}$ où $k = 0, 1, 2$ ou 3



Factorisation:) $X^4 + 1 = (X - e^{i\frac{\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{\pi}{4}})(X - e^{i\frac{3\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{3\pi}{4}})$
dans $\mathbb{C}[X]$

$$X^4 + 1 = (X^2 - X e^{i\frac{\pi}{4}} - X e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{4}}) (\quad)$$

$$= (X^2 - X \underbrace{(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}})}_{2\cos(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}} + 1) (X^2 - X \underbrace{(e^{i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}})}_{2\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2}} + 1)$$

Décomp dans $\mathbb{R}[X]$:

$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$