

~~exercice~~
exo 7. asymptote en $+\infty$ de $f(x) = (2x+3)e^{1/2x}$

$$\lim_{+\infty} f(x) = (+\infty \cdot e^0 = +\infty \cdot 1) = +\infty \quad \text{asymptote oblique?}$$

$$a = \lim_{+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right) e^{1/2x} = 2 \times e^0 = \underline{2 = a}$$

$$b = \lim_{+\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{+\infty} (2x+3)e^{1/2x} - 2x = +\infty - \infty \quad \text{f. \u00c0}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $+\infty \quad 1 \quad -\infty$

$$b = \lim_{+\infty} \left((2x+3) \left[1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] - 2x \right)$$

$$= \lim_{+\infty} \cancel{2x} + 3 + 2 + o(1) + \left(\frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) - \cancel{2x}$$

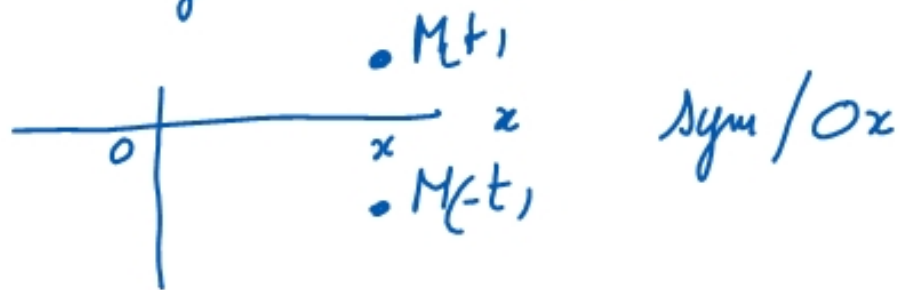
$$= 5$$

asymptote $y = 2x + 5$

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$$

$$M(-t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$$

car $\cos(-t) = \cos(t)$
 $\sin(-t) = -\sin(t)$



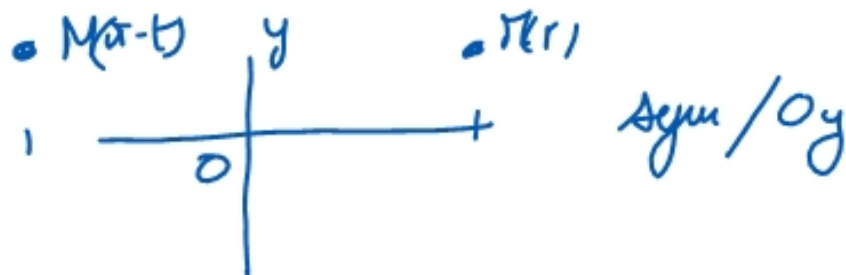
$$M(\pi-t) = ?$$

$\cos(\pi-t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi-t) = \sin(t)$

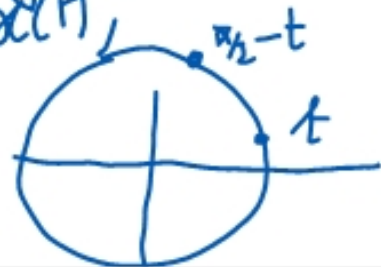
$$\cos^3(\pi-t) = -\cos^3(t)$$

$$\sin^3(\pi-t) = \sin^3(t)$$

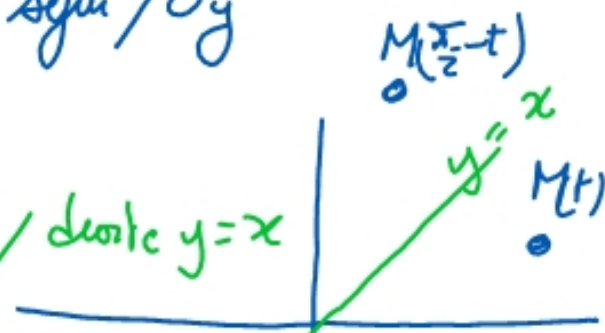
$$M(\pi-t) = \begin{pmatrix} -x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$



$$M(\frac{\pi}{2}-t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$$



Sym / droite y=x



$\cos(\frac{\pi}{2}-t) = \sin t$ et $\sin(\frac{\pi}{2}-t) = \cos t$

période π , donc, on a toute la courbe en étudiant sur $[-\pi; \pi]$

• Si t varie de 0 à π , alors $-t$ varie de 0 à $-\pi$

donc Étude sur $[0, \pi]$ + sym / Ox, on récupère les pts
pour $t \in [-\pi; 0]$

• Si t varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ alors $\pi - t$ varie de π à $\frac{\pi}{2}$

donc Étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ + sym / Oy, on récupère les pts
pour $t \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$

• Si t varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$ alors $\frac{\pi}{2} - t$ varie de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{4}$

donc Étude sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ + sym / droite d'eq $y = x$,
on récupère la cho sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

SUITES

I Vocabulaire

def: La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente lorsque
ou
converge

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe et
est finie

abréviation: on écrit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV

def: La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge lorsque elle ne converge pas
ou
est divergente

abréviation: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Div

def: La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée lorsque il existe $m \in \mathbb{R}$ tel. que
 $m \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$

def: La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majoree lorsque il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que
 $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

def: La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée lorsque il existe m et $M \in \mathbb{R}$ tels que
 $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$

borné = majoré + minoré

[T₁] Toute suite convergente est bornée

def. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (strictement croissante)

lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq u_{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1})$$

def. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (strictement décroissante)

lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq u_{n+1} \quad (u_n > u_{n+1})$$

def. une suite est monotone lorsque elle est croissante ou décroissante

[T₂]

Toute suite croissante et majorée CV

[T₂']

Toute suite décroissante et minorée CV

ex 1: $u_0 = 2$ $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n+1}}$ rgue: $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{u_n+1}} < 1 \quad (u_n > 0 \Rightarrow u_n+1 > 1 \Rightarrow \sqrt{u_n+1} > 1)$$

donc $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strict⁺ décroissante

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0), donc elle CV vers l

$$u_n \xrightarrow{+\infty} l \quad u_{n+1} \xrightarrow{+\infty} l = \frac{l}{\sqrt{l+1}} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 = \frac{1}{\sqrt{l+1}} \Rightarrow l+1=1 \\ \text{ou} \\ l=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Downarrow \\ l=0 \end{array}$$

ici, $l=0$

ex 2 : $u_0 = 2$ $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$

$$\left(\begin{array}{l} u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 1} - u_n \quad ?? \geq 0? \leq 0? \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{u_n + 1}}{u_n} \quad \geq 1? \leq 1? \quad ? \end{array} \right)$$

$$u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3} \approx 1,732 < u_0$$

Montrons que cette suite est décroissante par récurrence

$$\text{càd} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$$

Initialisation : pour $n = 0$ $u_1 = 1,7 \leq u_0 = 2$ oui

Hérédité : Je prends **un** $n \geq 0$. Je suppose que $u_{n+1} \leq u_n$

(on doit montrer que $u_{n+2} \leq u_{n+1}$)

$$u_{n+1} \leq u_n$$

on ajoute 1 : $u_{n+1} + 1 \leq u_n + 1$

on prend la $\sqrt{\quad}$: $\sqrt{u_{n+1} + 1} \leq \sqrt{u_n + 1}$ car $\sqrt{\quad}$ est une fonction croissante

$$u_{n+2} \leq u_{n+1} \quad \text{FIN}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$

La suite est décroissante

Elle est aussi minorée (par 0), donc elle CV vers l .

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \Rightarrow l = \sqrt{l+1} \Rightarrow l^2 = l+1 \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0$$

$\Delta = 5$ $l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $l \geq 0$ donc $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

def: la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

lorsque $\boxed{\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{+\infty} 1}$

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$$

def: la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

lorsque $\boxed{\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0}$

$$u_n = o(v_n)$$

$\boxed{T_3}$ Si $\left\{ \begin{array}{l} u_n = v_n + w_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est négligeable devant } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{array} \right.$ alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$

$\boxed{T_3'}$ une suite est équivalente à la partie principale de son DL
(premier terme non nul)
DLs en $\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$

ex3: DL à l'ordre 2 de $u_n = \frac{n}{n+1}$

\triangle $n \rightarrow +\infty$

$$u_n = \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

on a mis le plus grand en facteur

$$u_n = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1 \\ (u_n) \text{ CV vers } 1 \end{array} \right)$$

ex4: DL à l'ordre 1 de $u_n = \left(1 + \frac{e}{n}\right)^n = e^{n \text{Ln}\left(1 + \frac{e}{n}\right)}$

$$\text{Ln}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$u_n = e^{2 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = e^2 \cdot e^{-\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$u_n = e^{2 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^2 \left(1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$u_n = e^2 - \frac{2e^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^2)$$