

(31) $y'' - 2y' + y = -25 \sin(2x)$

HOH: $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ 1 est racine double

$y_H = (Ax+B)e^{1x}$

Sol part: $y_p = a \cos(2x) + b \sin(2x)$ $y'_p =$

$y''_p =$

$f(x) = e^{\cos x}$ DL à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{3}$ chgt $X = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = X + \frac{\pi}{3}$

$f(x) = e^{\cos(x + \frac{\pi}{3})} = e^{\cos x \cos(\frac{\pi}{3}) - \sin x \sin(\frac{\pi}{3})} = e^{\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x}$

$f(x) = e^{\frac{1}{2}(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - \frac{\sqrt{3}}{2}(x + o(x^2))} = e^{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{x^2}{4} + o(x^2)}$
 $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

$$f(x) = e^{1/2} \cdot e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{x^2}{4} + o(x^2)}$$

$$= e^{1/2} \left[1 + \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{x^2}{4} \right] + \frac{1}{2} \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} \right]^2 + o(x^2) \right]$$

message.

$$f(x) = e^{1/2} - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{1/2} x + e^{1/2} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{3x^2}{8} \right) + o(x^2)$$

$$= e^{1/2} - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{1/2} x + e^{1/2} \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$f(x) = e^{1/2} - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{1/2} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{e^{1/2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^2 + o\left(x - \frac{\pi}{3} \right)^2$$

Après: $y = e^{1/2} - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{1/2} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$ ↘ Comme au dessus.

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q dx$$

$$\left((1-x)^{n+1} \right)' = \underline{(n+1)(1-x)^n \cdot (-1)}$$

$$(1-x)^3 = 3(1-x)^2 \cdot (-1)$$

$$\underline{\underline{\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c}}$$

La dérivée de $(1-x)^{n+1}$ est :

$$f(x) \rightarrow 2x+1$$
$$f'(x) = 2x+1$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(u(x)^n)' = n \cdot u(x)^{n-1} \cdot u'(x)$$

$$I_{p, n+1} = \int_0^1 x^p (1-x)^{n+1} dx \quad \begin{array}{l} u = (1-x)^{n+1} \\ u' = -n(1-x)^n \\ v = \frac{x^{p+1}}{p+1} \end{array}$$

$$= \left[(1-x)^{n+1} \cdot \frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 - \int_0^1 -n(1-x)^n \cdot \frac{x^{p+1}}{p+1} dx$$

$$= 0 - 0 + \frac{n+1}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^n dx$$

$$\underline{I_{p, n+1} = \frac{n+1}{p+1} I_{p+1, n}}$$

$$I_{p, n+1} = \frac{n+1}{p+1} I_{p+1, n}$$

$$I_{p,0} = \int_0^1 x^p (1-x)^0 dx = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{1^{p+1}}{p+1} - \frac{0^{p+1}}{p+1} = \frac{1}{p+1}$$

$$I_{p,0} = \frac{1}{p+1}, \forall p$$

$$I_{p,1} = \frac{1}{p+1} I_{p+1,0} = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

$$I_{p,1} = \frac{1}{(p+1)(p+2)}, \forall p$$

$$I_{p,2} = \frac{2}{p+1} I_{p+1,1} = \frac{2}{p+1} \frac{1}{(p+2)(p+3)} = \frac{2}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

Hercule: Je prends un $n \geq 0$. Je suppose que $\frac{I_{p,n}}{p^n} = \frac{n! p!}{(n+p)!}$, $\forall p$

$$I_{p,n+1} = \frac{n+1}{p+1} \frac{I_{p,n}}{p^n} = \frac{n+1}{p+1} \cdot \frac{n! (p+1)!}{(n+p+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)n! \cancel{p!} (p+1)}{(p+1)(n+p+2)!}$$

et $(n+1)n! = (n+1)!$

$$I_{p,n+1} = \frac{(n+1)! p!}{(n+1+p)!} = \frac{(n+1)! p!}{(n+p+2)!}$$

OK!

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x)^k$$

... x^p ...

$$I_{p,n} = \int_0^1 x^p (1-x)^n dx$$

$$= \int_0^1 x^p \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^k dx$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{p+k} dx$$

$$= \sum_{k=0}^n \int_0^1 \binom{n}{k} (-1)^k x^{p+k} dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 x^{p+k} dx$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{p+k+1}}{p+k+1} dx$$

Matrices

I Généralités

notations : $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices ayant p lignes et q colonnes contenant des réels

exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

si les coefficients sont complexes, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne les matrices carrées ayant n lignes et n colonnes

Cas général: $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,q} \\ \vdots & & & \\ a_{p,1} & a_{p,2} & & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

La Matrice nulle est notée $O = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

La matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ex $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somme de deux matrices: Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$

$$\text{alors } A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$$

$$\text{ex: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Produit par un scalaire: Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ et $a \in \mathbb{R}$

$$\text{alors } a \cdot A = (a \cdot a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$$

$$\text{ex: } a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a & 3a \\ 4a & 5a & 6a \end{pmatrix}$$

remarque : $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ sont des espaces vectoriels de dimension $p \times q$
produit interne matriciel : \triangle \mathcal{R} fait par le nombre de colonnes de la 1^{ère} matrice égal au nombre de lignes de la deuxième

$$\text{Si } A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \text{ et } B = (b_{j,k})_{\substack{1 \leq j \leq q \\ 1 \leq k \leq r}}$$

$$\text{alors } A \cdot B = (c_{i,k})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq k \leq r}} \text{ où } c_{i,k} = \sum_{j=1}^q a_{i,j} \cdot b_{j,k}$$

exemple :

$$(1 \ 2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2$$

$$(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = ?$$

prototype: $(1 \ 2 \ 3) \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \vdots \quad \vdots \\ \boxed{} \quad \boxed{} \end{matrix}$

$1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2$
" "
8

$1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1$
" "
 $1 - 2 + 3$
" "
2

$$\underbrace{(1 \ 2 \ 3)}_{\in \mathcal{M}_{1,3}} \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \underbrace{}_{\in \mathcal{M}_{3,2}} \end{matrix} = \underbrace{(8 \ 2)}_{\in \mathcal{M}_{1,2}}$$

$$(1 \ 2 \ 3) \cdot (1 \ 2 \ 3) = ? \quad \text{se ulexte pos}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} = ?$$

$\in \mathcal{M}_{2,3}$

$\in \mathcal{M}_{3,3}$

$\in \mathcal{M}_{2,3}$

pratique:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \oplus & \oplus & \oplus \\ \oplus & \oplus & \oplus \end{matrix} = \begin{pmatrix} -1+4+12 & 1+6+3 & 2-6 \\ -4-2+0 & 4-3+0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & 10 & -4 \\ -6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ex: $(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0)$

$$(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \dots \quad \text{Impossible.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot I_n = A$$

$$I_n A = A$$

La transposée : On intervertit les lignes et les colonnes

ex : la transposée de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ (notée tA)

$$\text{et } {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$${}^t(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq j \leq q \\ 1 \leq i \leq p}}$$

c'est aussi la symétrique / la 1^{ère} bissectrice .

ex : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$\text{alors } {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Proprietà: $A+B=B+A$ $\forall A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

* $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ (distributivitate)

* $a(B+C) = aB + aC$ ($a \in \mathbb{R}$)

* $(A+B) \cdot C = AC + BC$ or $(A \cdot B) \cdot c = cA + cB$ ($c \in \mathbb{R}$)

* $I_n A = A I_n = A$

* $(AB)C = A(BC)$ $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

* ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$



$${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$$