

~~exercice~~

$$(19) P(x) = (x+1)^{2n} + (x-1)^{2n} + 1$$

$$\exists! (Q, R) \text{ tq } P(x) = Q(x)(x-1) + R(x)$$

et $\deg(R) < 1 \implies R(x) = c \text{ote}$

valeur en 1: $P(1) = 2^{2n} + 0 + 1 = Q(1) \cdot 0 + c \text{ote}$

$$R = 2^{2n} + 1$$

$$\exists! (Q, R) \text{ tq } P(x) = Q(x) \cdot (x-1)(x+1) + ax + b$$

valeur en 1: $2^{2n} + 1 = Q(1) \cdot 0 \cdot 2 + a + b$ $a + b = 2^{2n} + 1$

valeur en -1: $P(-1) = 0 + (-2)^{2n} + 1 = 2^{2n} + 1 = Q(-1) \cdot (-2) \cdot 0 + (-a + b)$
 $-a + b = 2^{2n} + 1$

$$\begin{cases} a + b = 2^{2n} + 1 \\ -a + b = 2^{2n} + 1 \end{cases} \implies L_1 + L_2 \quad 2b = 2(2^{2n} + 1) \implies b = 2^{2n} + 1$$

et $a = 0$

$$R(x) = 2^{2n} + 1$$

$$\exists! \text{QR } l_q \quad (X+1)^{2n} + (X-1)^{2n} + 1 = Q(X)(X-1)^2 + aX + b \quad (1)$$

valeurs en 1: $2^{2n} + 1 = a + b$

On dérive (1): $2n(X+1)^{2n-1} + 2n(X-1)^{2n-1} = Q'(X)(X-1)^2 + Q(X)2(X-1) + a$

valeurs en 1: $2n \cdot 2^{2n-1} + 0 = 0 + 0 + a$

$$\underline{a = 2n \cdot 2^{2n-1} = n \cdot 2^{2n}} \quad \Rightarrow \quad b = 2^{2n} + 1 - a = 2^{2n} + 1 - n \cdot 2^{2n}$$

$$R(X) = n2^{2n}X + 1 + (1-n)2^{2n}$$

Ex 1. $\mathcal{P}: 2x - y - 3z = 0$

① $2 \cdot 0 - 0 - 3 \cdot 0 = 0$, donc $\vec{0} \in \mathcal{P}$

② Je prends $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ $\in \mathcal{P}$

$$\vec{u} + \vec{v} = (x+x', y+y', z+z')$$

$$2x - y - 3z = 2 \overset{x}{(x+x')} - \overset{y}{(y+y')} - 3 \overset{z}{(z+z')}$$

$$= [2x - y - 3z] + [2x' - y' - 3z']$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$\text{car } \vec{u} \in \mathcal{P} \quad \text{car } \vec{v} \in \mathcal{P}$$

donc $\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{P}$ donc \mathcal{P} est stable pour +

③ pareil pour \cdot

\mathcal{L} est de dim 2. On cherche 2 vecteurs liés de \mathcal{L}

$$P: 2x - y - 3z = 0 \quad \vec{u} = (1, 2, 0) \in \mathcal{L} \quad \text{ou}$$
$$\vec{v} = (3, 0, 2) \in \mathcal{L} \quad ,$$

(\vec{u}, \vec{v}) est une base de \mathcal{L}

$$\left\{ \begin{array}{l} \dim \vec{\mathcal{D}} + \dim \mathcal{L} = \dim \mathbb{R}^3 \\ \vec{\mathcal{D}} \cap \mathcal{L} = \{ \vec{0} \} \end{array} \right.$$

on cherche donc $\vec{\mathcal{D}} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

$$f(x, y) = (x + 3y, 2x + 6y)$$

$$\bullet f(a\vec{u} + b\vec{v}) = \dots = a f(\vec{u}) + b f(\vec{v}) \quad \text{OK}$$

$$\bullet \vec{u}(x, y) \in \ker(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 3y = 0$$

(est la droite de vecteurs directs $\vec{u} = (3, -1)$)

$$\ker(f) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

f est pas injective
car

$$\ker(f) \neq \{ \vec{0} \}$$

Théorème du rang : $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 1$



$$f(1, 0) = (1, 2) \in \text{Im}(f)$$

donc $\text{Im}(f) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

f est pas surjective
car $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^2$

$$y'' + y' - 2y = (12x - 5)e^{2x} \quad y(0) = 2 \text{ et } y'(0) = -1$$

$$P(x) = x^2 + x - 2$$

$$\Delta = 9$$

$$2 \text{ racines: } \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}$$

$$y_H = Ae^{2x} + Be^{-2x}$$

$$\text{Sol part: } y_p = (ax^2 + bx)e^{2x} \quad y'_p = (2ax + b)e^{2x} + (ax^2 + bx)e^{2x}$$

$$y''_p = (2a e^{2x} + (2ax + b)e^{2x}) + ((2ax + b)e^{2x} + (ax^2 + bx)e^{2x})$$

$$y''_p + y'_p - 2y_p = \dots = (6ax + 2a + 3b)e^{2x} \\ = (12x - 5)e^{2x} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 6a = 12 \Rightarrow a = 2 \\ 2a + 3b = -5 \quad 3b = -5 - 4 = -9 \\ b = -3 \end{array}$$

$$y_p = (2x^2 - 3x)e^{2x}$$

$$\text{Sol de l'eq complete: } y = Ae^{2x} + Be^{-2x} + (2x^2 - 3x)e^{2x}$$

$$\text{Lo sol total pour } y(0) = 2 \text{ et } y'(0) = -1: \quad y(0) = A + B = 2$$

$$y'(0) = A e^0 - 2B e^{-2 \cdot 0} + (4 \cdot 0 - 3)e^0 + (2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0)e^0$$

$$y'(0) = A - 2B - 3 = -1$$

$$A - 2B = 2$$

IV Suites Géométriques

def 1

$$u_n = u_0 \cdot r^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

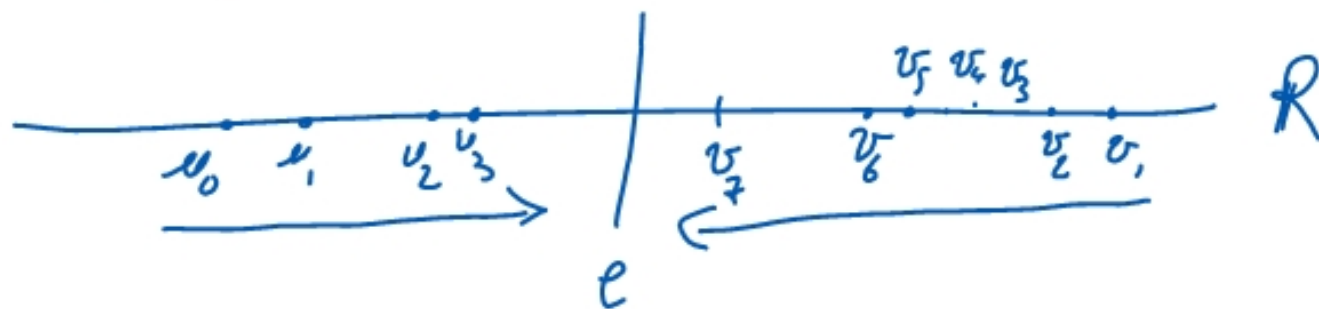
def 2

$$u_{n+1} = r \cdot u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Somme partielle

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \begin{cases} \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} & \text{qd } r \neq 1 \\ n+1 & \text{qd } r = 1 \end{cases}$$

V Suites adjacentes



def deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes lorsque

1° La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

2° — $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — décroissante

3° $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

\square Des suites adjacentes sont convergentes

exemple : avec $u_0 = 2$; $v_0 = 7$; $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

rem : tous les u_n et v_n sont > 0

$$u_1 = \sqrt{2 \cdot 7} = \sqrt{14} \approx 3,7$$

$$v_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 \dots$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad U_{n+1} - U_n &= \frac{U_n + \sigma_n}{2} - \sqrt{U_n \sigma_n} = \frac{U_n - 2\sqrt{U_n \sigma_n} + \sigma_n}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{U_n} - \sqrt{\sigma_n})^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \leq \sigma_n$

$$\bullet \quad \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\sqrt{U_n \sigma_n}}{U_n} = \frac{\sqrt{U_n \sigma_n}}{\sqrt{U_n} \sqrt{U_n}} = \frac{\sqrt{\sigma_n}}{\sqrt{U_n}} = \sqrt{\frac{\sigma_n}{U_n}} \geq 1 \Leftrightarrow U_{n+1} \geq U_n, \forall n$$

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

$$\bullet \quad \sigma_{n+1} - \sigma_n = \frac{U_n + \sigma_n}{2} - \sigma_n = \frac{U_n + \sigma_n - 2\sigma_n}{2} = \frac{U_n - \sigma_n}{2} \leq 0 \Rightarrow \sigma_{n+1} \leq \sigma_n, \forall n$$

La suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

(U_n) est croissante et majorée (par $\sigma_0 = 7$), donc elle CV vers l

(σ_n) est décroissante et minorée (par $U_0 = 2$), donc elle CV vers σ

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$\begin{array}{ccc} n \rightarrow +\infty & & n \rightarrow +\infty \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$v = \frac{u + v}{2}$$

$$\Rightarrow v = u + v \Rightarrow v = u$$

les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont la même limite donc $v_n - u_n \rightarrow 0$

les suites sont adjacentes

VI les suites vérifiant: $a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

1^{er} cas: $\Delta > 0$ il y a 2 racines simples α et β

solutions: $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$ où $A, B \in \mathbb{R}$

(si $A=0$, $u_n = B\beta^n$ (u_n) est géométrique de raison β
 si $B=0$, $u_n = A\alpha^n$ ————— α)

2^{es} cas: si $\Delta = 0$, alors il y a une racine double: α

solutions: $u_n = (An + B)\alpha^n$

3^e cas: $\Delta < 0$. 2 racines complexes conjuguées $re^{\pm i\theta}$

Sols: $u_n = r^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$

ex 1: Trouver la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 37, u_1 = -1$
et $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}, \forall n > 0$ ①

① $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n - 2u_{n-1} = 0, \forall n > 0 \Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0, \forall n \geq 0$

$P(x) = x^2 - x - 2 \quad \Delta = 9 \quad 2 \text{ racines: } \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$

$\Rightarrow u_n = A(-1)^n + B2^n$

$$\left. \begin{array}{l} u_0 = 37 = A + B \\ u_1 = -1 = -A + 2B \end{array} \right\} \begin{array}{l} L_1 + L_2: 3B = 36 \\ \Downarrow \\ B = 12 \end{array}$$

$\Rightarrow A = 37 - 12 = 25$

$u_n = 25(-1)^n + 12 \cdot 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$