

ewww

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^*$$

$$\frac{-x^2+1}{-x}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = \frac{x^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -f(x) \quad \text{f est impaire.}$$



Etude sur \mathbb{R}^{+*} + sym / 0

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - 1(x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

$$f'(1) = f'(1000) = \frac{999}{1000}$$

$$f'(95) = \frac{-}{+} < 0$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	2	$+\infty$

asy $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x} = x(1+\frac{1}{x^2}) \xrightarrow{+\infty} +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad f(1) = 2$$

Taylor: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots$
the $|y =$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} \quad f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$$

eu 1: pente $f'(1) = 0$ \rightarrow horizontale $y = 0x + b$
 $f(1) = 2$ \rightarrow $y = 2$

eu 2: pente $f'(2) = \frac{3}{4}$ $y = \frac{3}{4}x + b$
 $f(2) = \frac{5}{2}$ $\frac{5}{2} = \frac{3}{4} \cdot 2 + b \Rightarrow b = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$

$$y = \frac{3}{4}x + 1$$

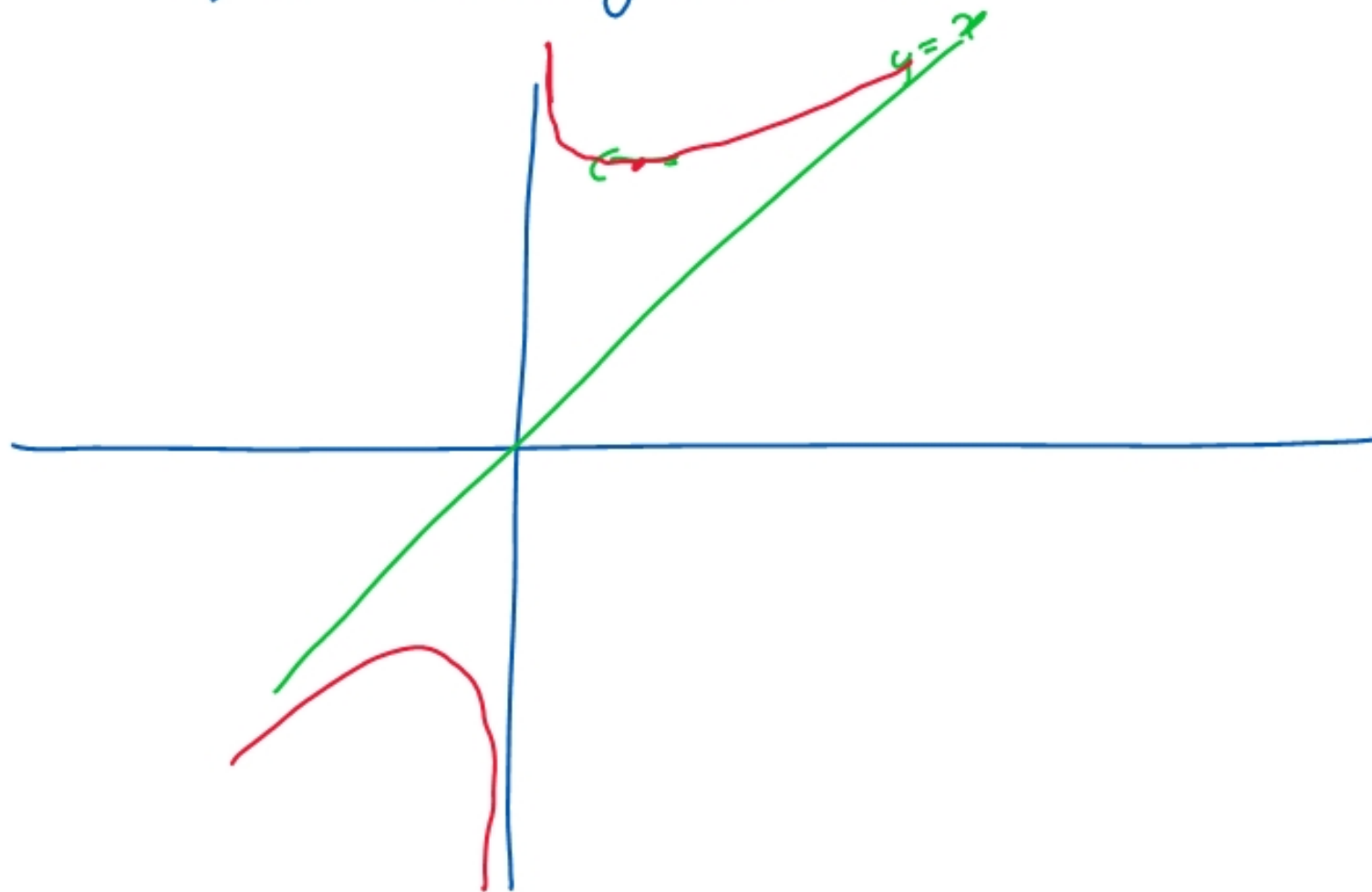
avec Taylor $f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + o(x-2)$

gde $y = \frac{5}{2} + \frac{3}{4}(x-2)$ $y = \frac{3}{4}x + 1$

eu +oo: $x \text{ et } y \rightarrow +\infty$ $\frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+1}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1 \rightarrow (1=a)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1-x) = \frac{x+1}{x} - x = \frac{x+1-x^2}{x} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\infty} = 0 = b$$

asymptote . $y = x$



$$g(x) = \frac{5x+4}{x(x-1)}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

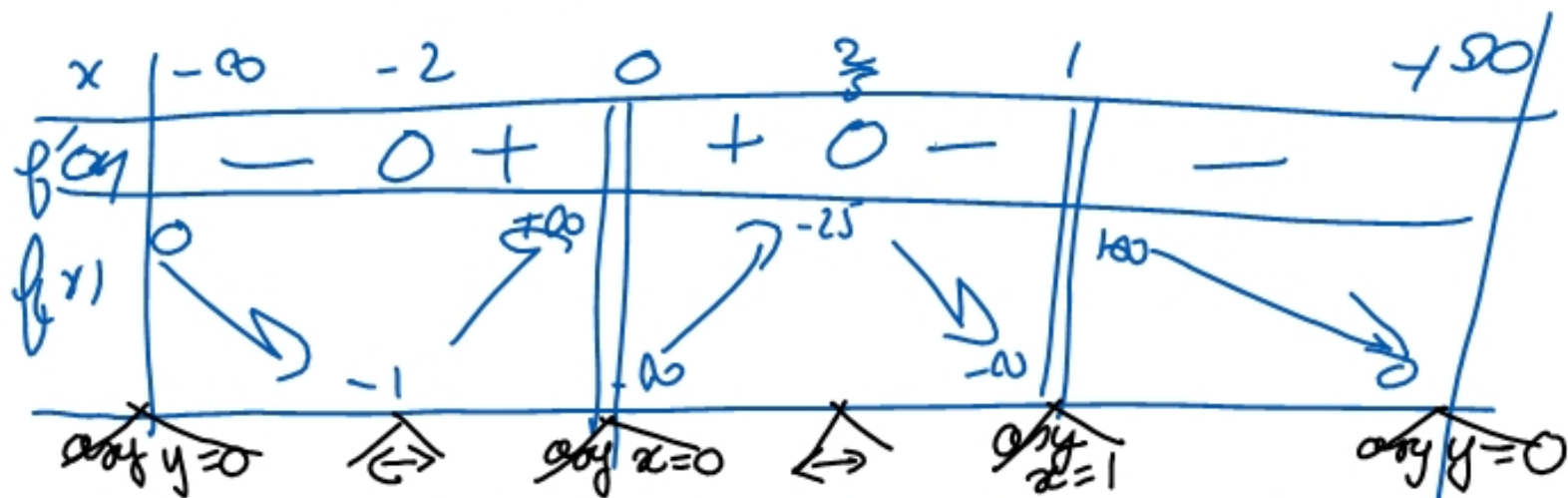
pas de pante, pas de periode

$$f(-2) = \dots \neq f(2) \\ \neq -f(2)$$

$$g'(x) = \frac{-5x^2 - 8x - 4}{(x^2 - x)^2}$$

$$\Delta = 144 = 12^2$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+4}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} = \frac{5}{\infty} = 0$$

te en $x_0=2$: $f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + o(x-2)$

$f(2) = \frac{14}{2} = 7$

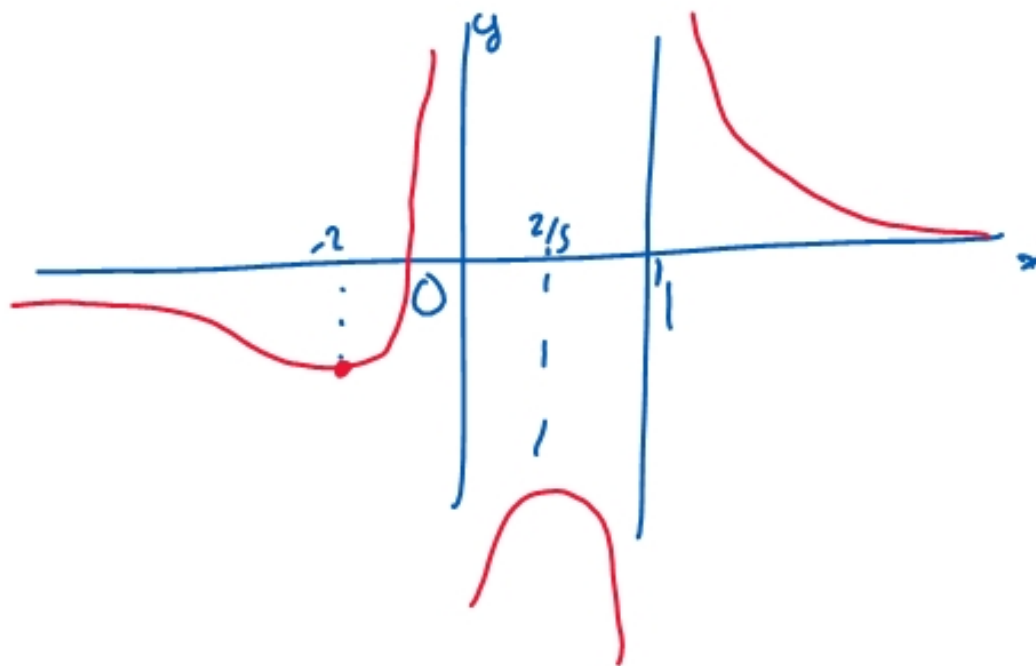
$f'(2) = -8$

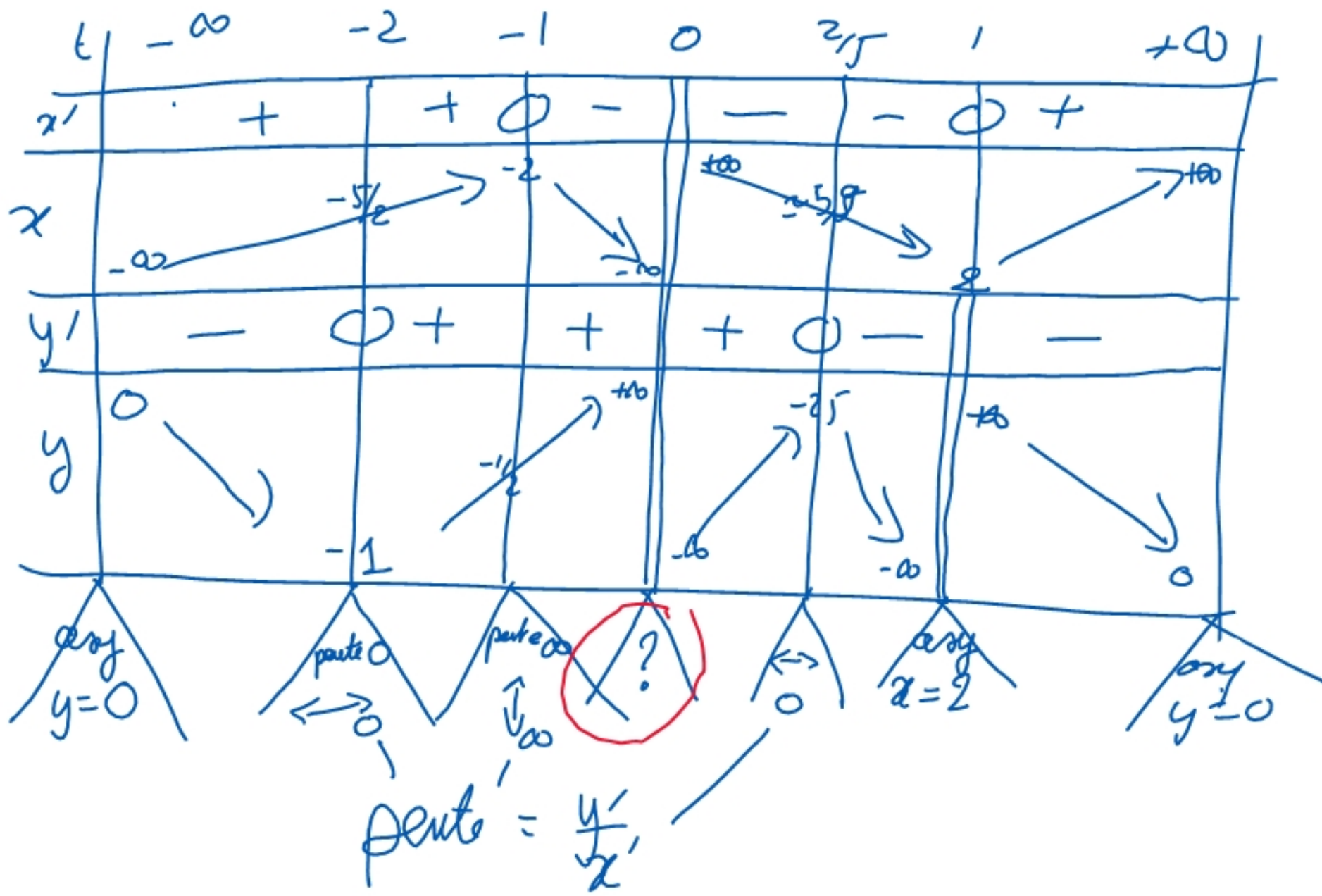
te: $y = 7 - 8(x-2)$ $y = -8x + 23$

te en $x_0=2$. pente = $f'(2) = -8$ $y = -8x + b$

en $x=2$, $y=7$

$7 = -16 + b \Rightarrow b = 23$.





eng: $\frac{y}{z} = \frac{5t+4}{t(t-1)} \cdot \frac{z}{t^2+1} \xrightarrow{0} \frac{4}{-1 \cdot 1} = -4 = a$

$y - ax = y + 4x = \frac{(5t+4)}{t(t-1)} + \frac{4t}{t^2+1} \cdot \frac{t(t-1)}{t(t-1)}$ 1/2 au lieu de x

~~$= \frac{5t^3 + 4t^2 + 5t + 4 + 4t^3 - 4t^2}{(t^2+1)t(t-1)}$~~

$y + 4x = \frac{5t+4}{t(t-1)} + \frac{4(t^2+1)x(t-1)}{t \cdot x(t-1)}$

~~$= \frac{5t+4 + 4t^3 + 4t - 4t^2 - 4}{t(t-1)} = \frac{9t - 4t^2 + 4t^3}{t(t-1)}$~~

~~$= \frac{(9 - 4t + 4t^2)}{t-1}$~~ $\xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{9}{-1} = -9$
any $y = -4x + 9$

Suites.

I. Généralités

CV, DiV

sous-suites, croissante, décroissante.

def: La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée lorsque $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$
il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que
ici, M s'appelle un majorant de la suite

def: La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée lorsque il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq u_n$
un minorant de la suite

def: La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée lorsqu'elle est minorée et majorée

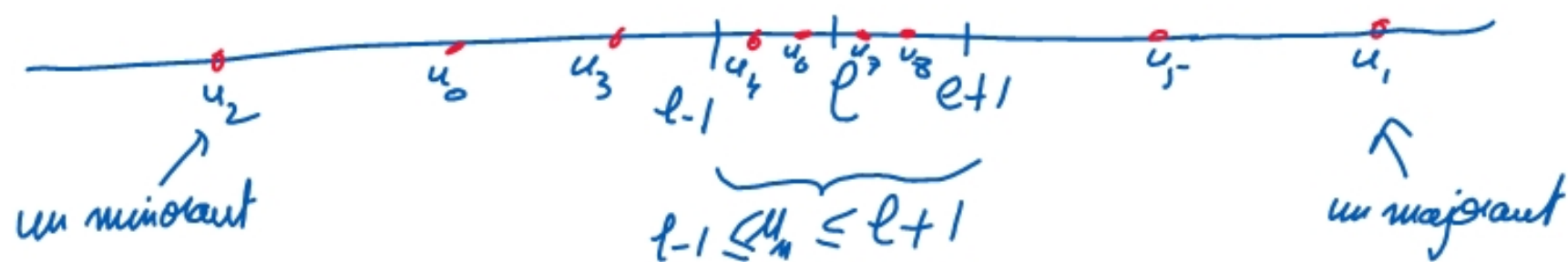
exemple. la suite $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

-1 et -3 sont des mineurs ; 1 et 2 sont des majeurs.

\square toute suite convergente est bornée

\square On sait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV vers l c'est $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N \quad l-1 \leq u_n \leq l+1$



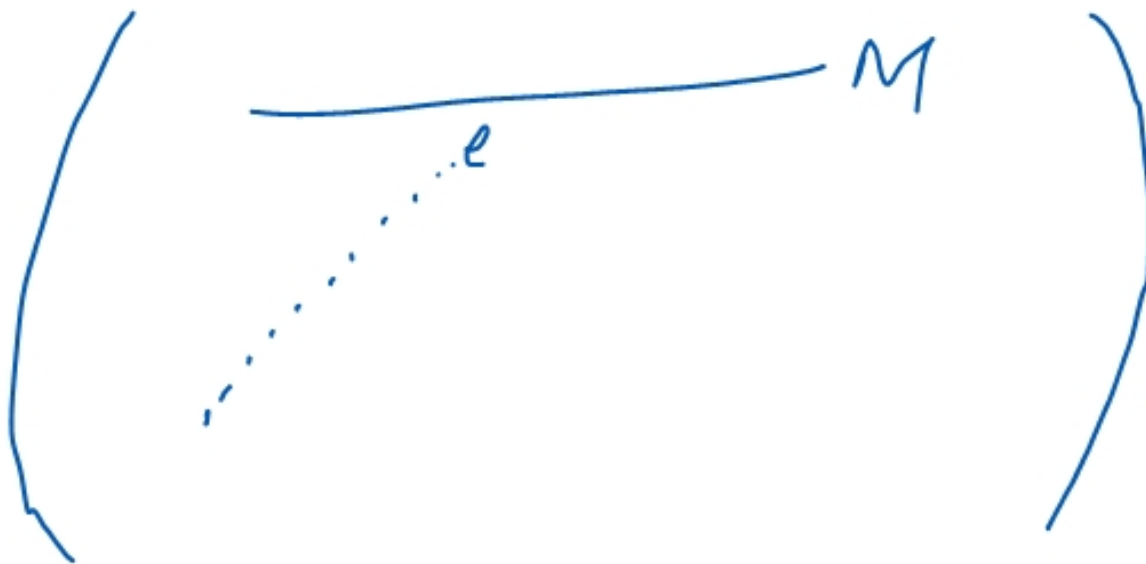
Un mineur m est un nombre plus petit que tous les u_n pour $n \leq N$
et plus petit que $l-1$

Un majorant M est un nombre tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
et $l_H \leq M$

$\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$. La suite est bornée II.

$\boxed{T_2}$

Toute suite croissante et majorée converge



$\boxed{T_2'}$

Toute suite décroissante et minorée converge

ex: $\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \\ \text{et} \\ u_0 = 2 \end{array} \right.$ On a montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est
décroissante (par récurrence).

que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive (récurrence par exemple)

$$0 \leq u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc elle converge.

vers quelle limite? On l'appelle l

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \Rightarrow l = \sqrt{l + 1} \Rightarrow l^2 = l + 1 \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5 \quad 2 \text{ sols: } \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0, \text{ donc } \boxed{l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

II Relations de comparaison

def: Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$

def: Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

Équivalent d'un produit: Si $\begin{cases} a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} a'_n \\ b_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b'_n \end{cases}$ alors $a_n \cdot b_n \sim_{n \rightarrow +\infty} a'_n \cdot b'_n$

Équivalent d'un quotient: Si $\begin{cases} a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} a'_n \\ b_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b'_n \end{cases}$ alors $\frac{a_n}{b_n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a'_n}{b'_n}$

Ça ne marche pas avec +: ~~$\begin{cases} a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} a'_n \\ b_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b'_n \end{cases} \Rightarrow a_n + b_n \sim_{n \rightarrow +\infty} a'_n + b'_n$~~

ex1: $\frac{2n^2+n}{n^3-n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n^2}{n^3} = \frac{2}{n}$

ex2: $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} ?$

$\sin x = x + o(x)$

$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{0} 1$

$\sin x \underset{0}{\sim} x \Rightarrow \underline{\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$

$\tan(x) = x + o(x)$

$\tan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} ?$

$-\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{-1-2}{6} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

$\tan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

$\sin x - \tan x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = -\frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}x^3$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^3}$$

Comparaisons des croissances: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{\ln(n)} = +\infty \quad (a > 0)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n^a} = +\infty \quad (a > 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^n}{n^a} = +\infty \quad \begin{matrix} (a > 0) \\ (b > 1) \end{matrix}$$

$$\square \lim_{+\infty} \frac{n!}{e^n} = +\infty$$

raison de la suite

III Suites arithmétiques -

def 1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique lorsque il existe r tel que $u_n = u_0 + nr, \forall n$

def 2

_____ il existe r tel que $u_{n+1} = u_n + r, \forall n$

Somme paires:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_q = \frac{(q-p+1)(u_p + u_q)}{2}$$

nombre de termes

le 1^{er} + le dernier

$$\sum_{k=p}^q u_k = \frac{(q-p+1)(u_p + u_q)}{2}$$