

~~exercice~~

Partie B

B

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x}$$

① DL de  $\frac{1}{1+x^2}$

On utilise le DL de  $\frac{1}{1+x}$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x) \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$$

on intègre :  $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) + cste$

valeur en 0 :  $0 = 0 - 0 + 0 + cste \Rightarrow cste$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

On dit par  $x$  :  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)$

(2°) def :  $f$  est continue en  $a$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

def :  $f$  est prolongeable par continuité lorsque  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe et est fini

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) = 1$$

On peut prolonger  $f$  par continuité en 0. On pose  $f(0) = 1$

3°)  $f$  possède un DL à l'ordre 1 <sup>en 0</sup>, donc  $f$  est dérivable en 0  
 et  $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$  (TAYLOR)

$$= 1 + 0x - \frac{x^2}{3} + o(x^2)$$

donc  $f'(0) = 0$

et la courbe est en dessous de la tangente car  $-\frac{x^2}{3} \leq 0$

(eq de la tte en 0:  $y = 1$ )

4°)  $p(x) = x - (1+x^2) \operatorname{arctan} x$

$$p'(x) = 1 - \left( 2x \operatorname{arctan} x + \frac{1+x^2}{1+x^2} \right) = -2x \operatorname{arctan} x$$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	+		-
$\operatorname{arctan} x$	-		+
$p'(x)$	-		-

← signe de  $p'$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$p(x)$		$0$	
$f(x)$	$+\infty$	$0$	$-\infty$

$$\left( \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - (1+x^2) \operatorname{arctan} x &= +\infty - +\infty \left( \frac{\pi}{2} \right) \quad \sqrt{\cdot} \text{ I} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{1}{x} - \left( \frac{1}{x} + 1 \right) \operatorname{arctan} x \right) \rightarrow +\infty \times \left( -\frac{\pi}{2} \right) = -\infty \\ &\quad \left( \begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array} \quad - \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ 1 \end{array} \quad \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \right)$$

5°

$$\begin{aligned} f(x) &= \left( \frac{\operatorname{arctan} x}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot x - \operatorname{arctan} x}{x^2} \quad \begin{array}{l} \times (1+x^2) \\ (1+x^2) \end{array} \\ &= \frac{x - (1+x^2) \operatorname{arctan} x}{x^2(1+x^2)} = \frac{p(x)}{x^2(1+x^2)} \end{aligned}$$

def:  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  signifie que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'$  est continue sur  $\mathbb{R}$

• Pour  $x \neq 0$ ,  $f$  est de classe  $C^1$  comme quotient (dénominateur non nul), et somme et produit de fonctions de classe  $C^1$

• Problème en 0: Il reste à prouver que  $f'$  est continue en 0  
c'est à dire que  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x^2) \cos(x)}{x^2(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x^2)(x + o(x^2))}{x^2(1+x^2)}$$

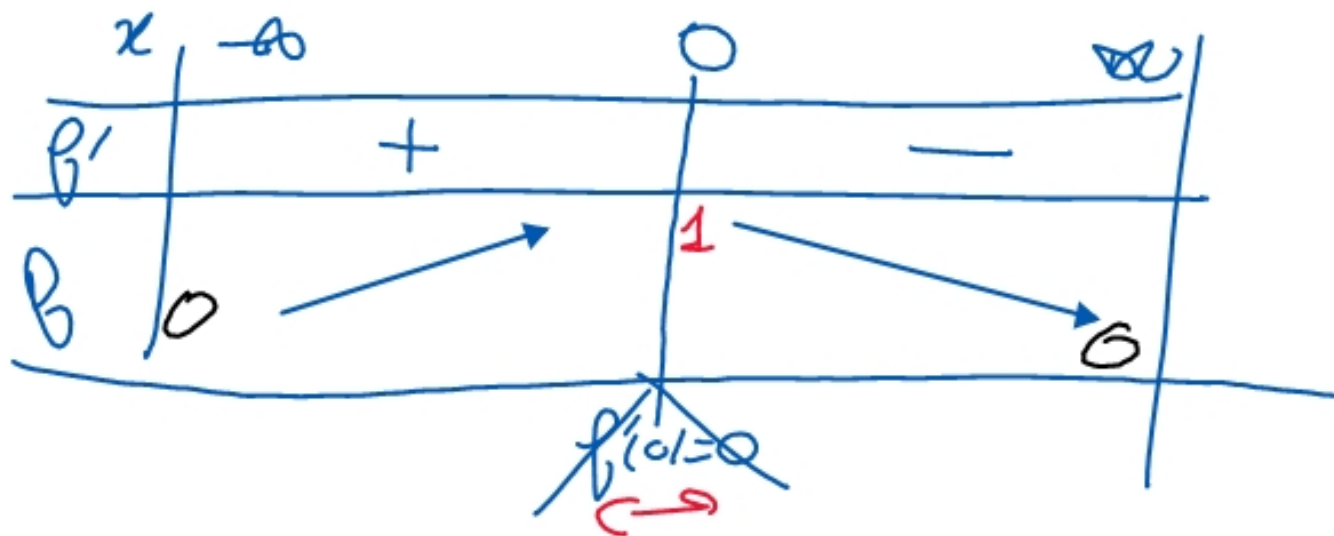
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x + x^3 + o(x^2) + o(x^4)}{x^2(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 o(1)}{x^2(1+x^2)} = \frac{0}{1} = 0$$

on avait trouvé  $f'(0) = 0$

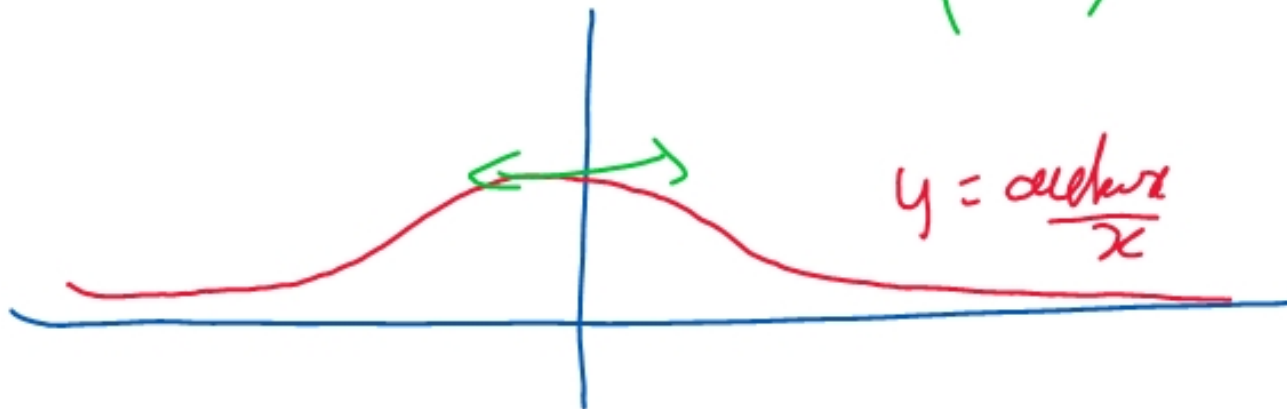
Yes  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$   
 $f'$  est continue en 0 .fin

⑥

$f'$  est de signe de  $p$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x} = \left( \frac{\frac{\pi}{2}}{\infty} \right) = 0$$



①  $I = \int_0^1 \frac{e^{\cos t} |t|}{t} dt$  Ici  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  
 donc on peut intégrer

②  $|\Omega_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} dt \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad ??$

$|\Omega_n(x)| = \left| \int \cdot \right| \leq \int | \cdot | = \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \leq ?$

$\frac{1}{1+t^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{t^{2n}}{1+t^2} \leq t^{2n}$

donc  $|\Omega_n(x)| \leq \int_0^x t^{2n} dt = \left[ \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$$\textcircled{3} \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{for } x \neq 1$$

$$1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2}$$

$$\text{via } \boxed{x = -t^2}$$

$$1 + x + x^2 - \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}, \quad \forall x$$

also  $x = -t^2$ :

$$\begin{aligned} 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-t^2)^{n-1} &= \frac{1 - (-t^2)^n}{1 - (-t^2)} \\ \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} &= \frac{1 - (-1)^n t^{2n}}{1 + t^2} \quad \text{Yes} \end{aligned}$$



