

Suites

I Généralités

def: On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (noté CV) lorsque

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe et est finie

def: On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge (noté DIV) lorsque elle ne

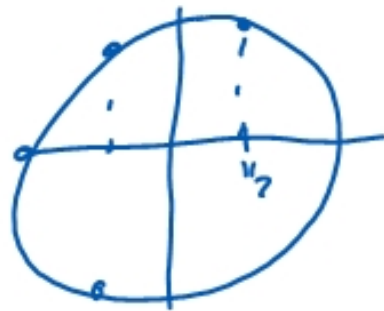
converge pas c à d : Soit il n'y a pas de limite
Soit la limite est infinie.

ex1: Etude de la suite de terme général $u_n = n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ DIV

ex2: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$ n'existe pas. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ DIV

ex 3: $(\sin(n \frac{\pi}{3}))_{n \in \mathbb{N}} = (0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dots)$



la suite $(\sin(n \frac{\pi}{3}))_{n \in \mathbb{N}}$ Div.

ou pour $u_n = \sin(n \frac{\pi}{3})$

Une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vaut toujours 0

c'est la suite $v_n = u_{3n}$

Une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vaut toujours $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c'est par exemple $w_n = u_{6n+1}$

ex 4: Etude de la suite de terme général $u_n = \frac{\sin(n \frac{\pi}{3})}{n}$, pour $n > 0$

$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$) donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (T des gendarmes)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ CV

def: La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq u_{n+1}$

... strictement croissante ... $u_n < u_{n+1}$

... décroissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq u_{n+1}$

... strictement décroissante ... $u_n > u_{n+1}$

remarque: $u_n \leq u_{n+1} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$

• Si $u_n > 0, \forall n$, alors $u_n \leq u_{n+1} \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

3 façons de montrer qu'une suite est croissante (ou décroissante)

1° On calcule $u_{n+1} - u_n$ 2° On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

3° On fait une récurrence

ex1: Montrer que la suite définie par $u_0 = 2$ $\left| \begin{array}{l} u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n+1}} \end{array} \right. \forall n \geq 0$ est décroissante

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{u_n+1}} < 1 \quad \text{car} \left(\begin{array}{l} 1 < 1+u_n \Rightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{1+u_n} \text{ (la fonction } \sqrt{\cdot} \text{ est croissante)} \\ \Rightarrow 1 < \sqrt{1+u_n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+u_n}} < 1 \end{array} \right)$$

$$\Downarrow u_{n+1} < u_n, \forall n$$

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante

$$u_1 = \frac{u_0}{\sqrt{u_0+1}} = \frac{2}{\sqrt{2+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$u_2 = \frac{u_1}{\sqrt{u_1+1}} = \frac{2/\sqrt{3}}{\sqrt{2/\sqrt{3}+1}} \quad \text{beurk}$$

ex2: Montrer que la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n+1}$ est strictement décroissante

$$\left(u_1 = \sqrt{u_0+1} = \sqrt{3} \approx 1,732 \quad u_2 = \sqrt{u_1+1} = \sqrt{\sqrt{3}+1} \approx \sqrt{2,7} \right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n+1} - u_n \quad ?? \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{u_n+1}}{u_n} \quad ??$$

On va faire une récurrence

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$

Initialisation : pour $n=0$ $\underline{u_1} = \sqrt{3} \approx 1,7 < \underline{u_0} = 2$ Ok

Hérédité : Je prends un $n \geq 0$. Je suppose que $u_{n+1} < u_n$

(je doit montrer que $u_{n+2} < u_{n+1}$)

$u_{n+1} < u_n \Rightarrow$ On ajoute 1 : $u_{n+1} + 1 < u_n + 1$

on prend la racine : $\sqrt{u_{n+1} + 1} < \sqrt{u_n + 1}$ car la fonction $\sqrt{\quad}$ est croissante

$u_{n+2} < u_{n+1}$ (D.F.D)

Conclusion : D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \underline{u_{n+1} < u_n}$
La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante