

rank

Calcul de l'image : on utilise le théorème du rang (ou T des dimensions)

$$\boxed{\text{IT}} \quad \dim(\ker(\beta)) + \dim(\text{Im}(\beta)) = \dim(E)$$

↑  
ensemble de départ

iii |  $\dim(\ker(\beta)) = 0$  car  $\ker(\beta) = \{(0,0)\}$ .  
| l'ens de départ est  $\mathbb{R}^2$ .  $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

donc  $\dim(\text{Im}(\beta)) = 2$  ( $0 + ? = 2$ )

$\text{Im}(\beta)$  est un sev de  $\mathbb{R}^2$ , donc  $\text{Im}(\beta) = \mathbb{R}^2$   
↑ ensemble d'arrivée

ex 2  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est linéaire  
 $(x,y) \mapsto (x-2y; 3x-6y)$  Trouver le noyau et l'image

Calcul du noyau:  $\vec{u}(x,y) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_2 - 3L_1 \\ \phantom{L_2 - 3L_1} \end{matrix} \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

2 lignes et 1 eq: dim 1. C'est une droite 1 paramètre.

$$y = t \Rightarrow x = 2t$$

$$\text{Ker}(f) = \{ (2t; t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

ou bien

$\text{Ker}(f)$  est la droite de vecteur directeur  $\vec{u} = (2; 1)$

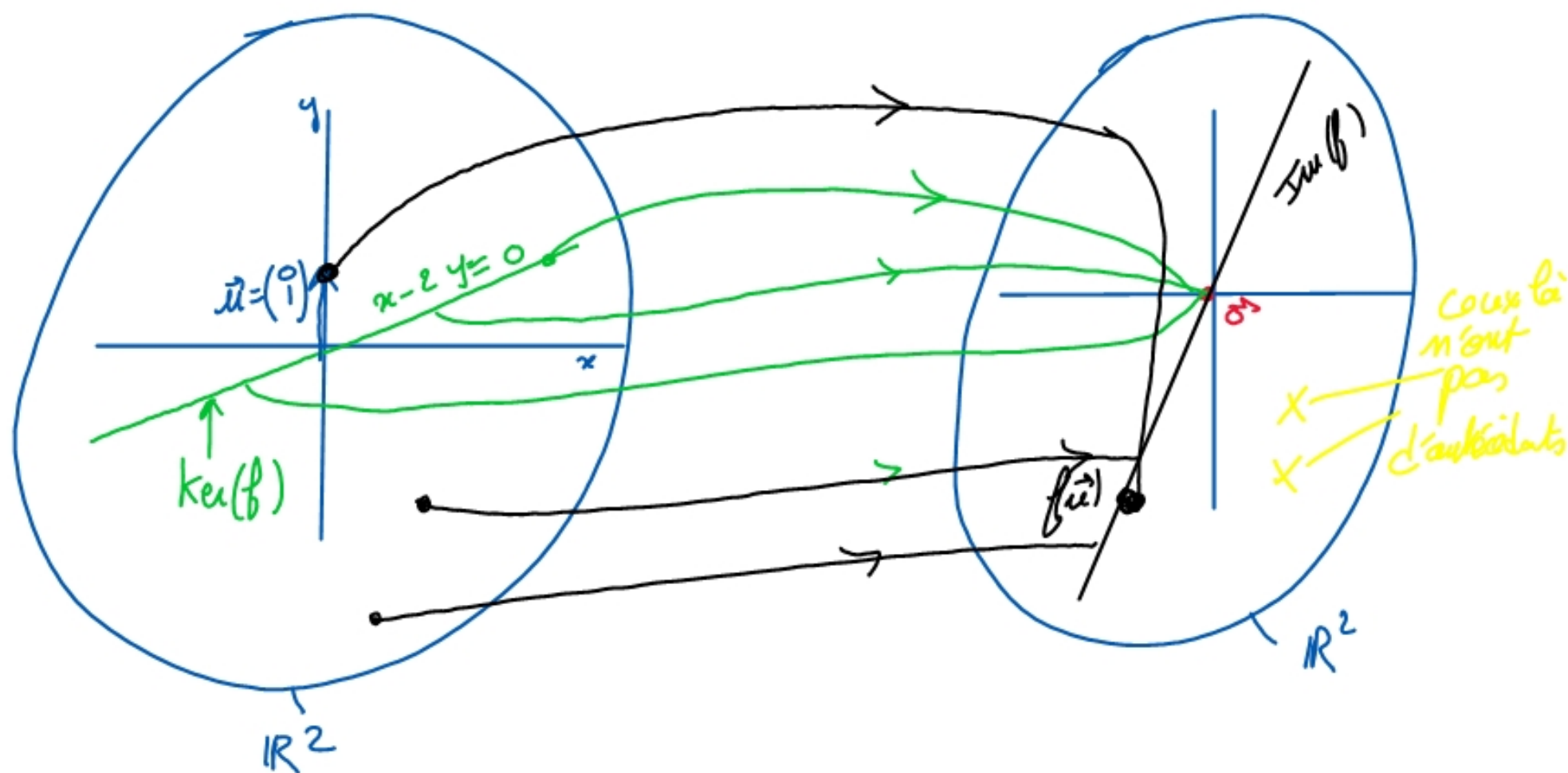
ou bien

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(\vec{u}) \text{ où } \vec{u} = (2; 1)$$

↑  
vect de départ

Calcul de  $\text{Im}(f)$ : T du rang:  $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^2)$

donc  $\dim(\text{Im}(f)) = 1$   $1 + ? = 2$   
C'est une droite. Laquelle?



$$f(0,1) = (0-2; 0-6) = (-2, -6)$$

donc  $\text{Im}(f)$  est la droite de vecteur directeur  $(-2; -6)$

$$\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}(-2; -6)}$$

$$\underline{\text{Im}(f) = \{(-2t, -6t) \mid t \in \mathbb{R}\}}$$

rque:  $f$  est surjective  $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$   
↑  
ens d'arrivede

$\square$   $f$  est injective  $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{ \vec{0} \}$

dans l'ex 1:  $\text{Ker}(f) = \{ \vec{0} \}$  et  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ ,  $f$  est bijective

dans l'ex 2:  $\text{Ker}(f)$  est une droite, donc  $f$  n'est pas injective

$\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^2$ , donc  $f$  n'est pas surjective