

Eq de T?

$$\vec{OM} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

Un vecteur \perp à \vec{OM} est $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$

la pente de T vaut $a = \frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta}$

$$y = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} x + b$$

T passe par M, donc $y_M = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} x_M + b$

$$\sin \theta = \frac{\cos \theta \cdot \cos \theta}{-\sin \theta} + b$$

$$b = \sin \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$y = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} x + \frac{1}{\sin \theta}$$

$$y \sin \theta = -\cos \theta x + 1$$

2^{es} méthode: $\vec{OT}(\cos\theta, \sin\theta)$ est \perp à T

donc T a pour eq $\cos\theta x + \sin\theta y = c$

T passe par M , donc $\cos^2\theta + \sin^2\theta = c = 1$

$$T : \cos\theta x + \sin\theta y = 1$$

(2^e) D est $\parallel \vec{a}(\vec{OT})$ et passe par B

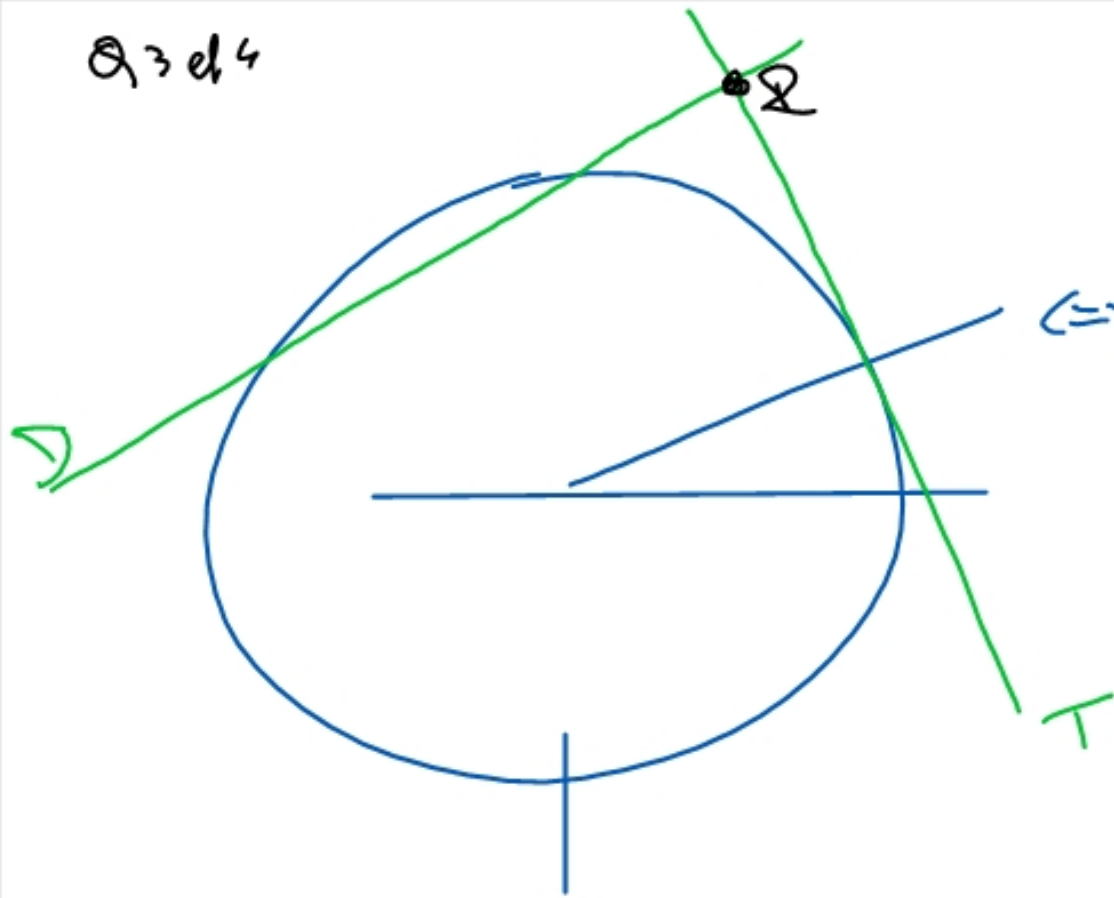
un vect dir de D est $\vec{OT} = (\cos\theta, \sin\theta)$ pente = $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$D : y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x + b$$

D passe par $B(0,1)$ $1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$

$$\cos\theta y = \sin\theta x + \cos\theta$$

Q3 d4



$$\begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta = 1 \\ -x \sin \theta + y \cos \theta = \cos \theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \sin \theta & \begin{cases} x \cos \theta \sin \theta + y \sin^2 \theta = \sin \theta \\ -x \cos \theta \sin \theta + y \cos^2 \theta = \cos^2 \theta \end{cases} \\ x \cos \theta & \end{cases}$$

$$L_1 + L_2: \quad y_P = \sin \theta + \cos^2 \theta \quad (1)$$

$$x_P = \cos \theta - \cos \theta \sin \theta \quad (2)$$

Ad $\theta = 0$: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ les formules (1) et (2) continuent encore

Ad $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\begin{cases} y = 1 \\ -x = 0 \end{cases}$ les formules (1) et (2) marchent encore.

$$P = (\cos \theta - \cos \theta \sin \theta; \sin \theta + \cos^2 \theta)$$

Applications linéaires de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q

I Généralités

Def: les applications linéaires de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q sont telles que:

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^p, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^p, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad f(a\vec{u} + b\vec{v}) = a f(\vec{u}) + b f(\vec{v})$$

Elles ont la forme suivante:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \left(\underbrace{a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p}_{1^{\text{er}} \text{ coord}}, \underbrace{a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p}_{2^{\text{iem}}}, \dots, \right. \\ \left. \underbrace{a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \dots + a_{q,p}x_p}_{\text{dernière coordonnée}} \right)$$

ex1: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (2x + 3y; x - 5y)$

Montrer que f est linéaire

Je prends $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ et a et $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(a\vec{u} + b\vec{v}) &= f((ax, ay) + (bx', by')) = f(ax + bx'; ay + by') \\ &= (2(ax + bx') + 3(ay + by'); (ax + bx') - 5(ay + by')) \\ &= (2ax + 2bx' + 3ay + 3by'; ax + bx' - 5ay - 5by') \end{aligned}$$

$$= (2ax + 3ay; ax - 5ay) + (2bx' + 3by'; bx' - 5by')$$

$$= a \underbrace{(2x + 3y; x - 5y)}_{f(\vec{u})} + b \underbrace{(2x' + 3y'; x' - 5y')}_{f(\vec{v})}$$

$$f(a\vec{u} + b\vec{v}) = a f(\vec{u}) + b f(\vec{v})$$

donc f est linéaire

ex 2: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \mapsto (2x \ ; \ x)$

Je prends x et $y \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(ax + by) = \dots = a f(x) + b f(y)$$

ex 3: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est pas linéaire
 $f: x \mapsto 3x - 1$

(car $f(1+2) = f(3) = 8$
 $f(1) + f(2) = 2 + 5 = 7$)

par contre $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire
 $g: x \mapsto 3x$

ex 4: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x, y, z) \mapsto 2x + y - z$

ex 5: $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto x_1 - x_3 + x_4 - 3x_5$

ex 6: $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4; x_3 - 2x_4)$

conséquences immédiates: $f(\vec{0}) = \vec{0}$ — qd f est linéaire
 \uparrow dans \mathbb{R}^p \uparrow dans \mathbb{R}^q

$\square f(\vec{0} + \vec{0}) = f(\vec{0})$
 $\quad \quad \quad = f(\vec{0}) + f(\vec{0})$ car f est linéaire

$\rightarrow f(\vec{0}) + f(\vec{0}) = f(\vec{0}) \Rightarrow f(\vec{0}) = \vec{0} \quad \square$

- $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

- $f(a\vec{u}) = a f(\vec{u})$

- $f(a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_n\vec{u}_n) = a_1 f(\vec{u}_1) + \dots + a_n f(\vec{u}_n)$

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(\vec{u}_i)$$

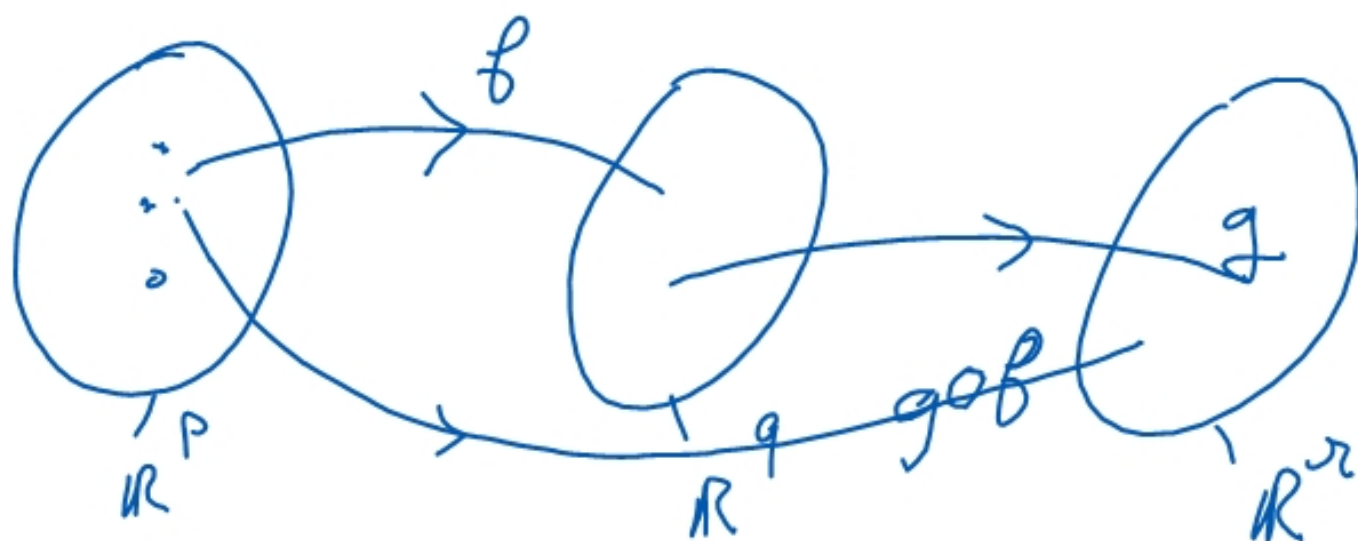
□ La composée de deux applications linéaires est linéaire

□ $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ et $g: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^r$

$$g \circ f \Big| \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^r$$

$$\vec{u} \mapsto g \circ f(\vec{u}) = g[f(\vec{u})]$$

Je prends \vec{u} et $\vec{v} \in \mathbb{R}^p$ et $a, b \in \mathbb{R}$



$$\begin{aligned}
 g \circ f(a\vec{u} + b\vec{v}) &= g[f(a\vec{u} + b\vec{v})] \\
 &= g[a f(\vec{u}) + b f(\vec{v})] \text{ car } f \text{ est linéaire.} \\
 &= a g[f(\vec{u})] + b g[f(\vec{v})] \text{ car } g \text{ est linéaire} \\
 &= a g \circ f(\vec{u}) + b g \circ f(\vec{v}).
 \end{aligned}$$

donc $g \circ f$ est linéaire \square

def: Un endomorphisme de \mathbb{R}^p est une application linéaire qui va de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^p / $\text{Id}_{\mathbb{R}^p}$

def: Un isomorphisme est une application linéaire de E dans F bijective

def: Un automorphisme = endo + iso
est une application bijective, linéaire qui va de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^p
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $\text{Id}_{\mathbb{R}^p}$

(def: Une forme linéaire sur \mathbb{R}^p est une application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R})

Notations: $\mathcal{L}(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires de E dans F
 $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E