

(12)

$$\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ 2x - y + z - 2t = 0 \\ 3x + 2z - t = 3 \\ x + 2y - z + t = 3 \\ x - 2y - 3t = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \\ L_4 - L_1 \\ L_5 - L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ -3y - z - 4t = -8 \\ -3y - z - 4t = -9 \end{cases} \Rightarrow -8 = -9$$

impossible

$\mathcal{J} = \emptyset$

(16)

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + (\cancel{a-2})y + (a-3)z = \end{array} \right.$$

$$\textcircled{16} \begin{cases} (a-1)x + (a+1)y + (a-2)z = a \\ 2y - z = 1 \\ ax + 2y + (a-1)z = 3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} 2a-4+a+1 \mid z \\ 2a-(a+1) \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2L_1 - (a+1)L_2 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} (2a-2)x + (3a-3)z = a-1 \\ 2y - z = 1 \\ ax + (a-2)z = 2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(a-1)x + 3(a-1)z = a-1 \\ 2y - z = 1 \\ ax + (a-2)z = 2 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{cas:}}$ $a=1$ $\left\{ \begin{array}{l} 0=0 \\ 2y - z = 1 \\ -z = 2 \end{array} \right.$ $\left. \begin{array}{l} \text{le syst} \\ \text{devient} \end{array} \right\}$ $\left. \begin{array}{l} 2 \text{ eq et 3 inconnues, dimension 1} \\ 1 \text{ paramètre par ex } y=t \end{array} \right)$

$$L_2: z = 2y - 1 = 2t - 1$$

$$L_3: x = z + 2 \Rightarrow x = 2t - 1 + 2 = 2t + 1$$

$$\mathcal{L} = \left\{ (2t+1; t; 2t-1) \text{ où } t \in \mathbb{R} \right\}$$

C'est la droite de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ passant par $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

2^e cas $a \neq 1$ on simplifie par $a-1$. le système devient

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x \\ 2y \\ ax \end{array} \right. \begin{array}{l} + 3z = 1 \\ - z = 1 \\ + (a-2)z = 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} aL_1 - 2L_3 \\ \\ \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x \\ 2y \\ (a+4)z \end{array} \right. \begin{array}{l} + 3z = 1 \\ - z = 1 \\ = a-4 \end{array}$$

$$\exists a - 2a + 4$$

cas 2.1 $a = -4$ le système devient

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = 8 \end{array} \right. \text{ impossible } \underline{\mathcal{S} = \emptyset}$$

cas 2.2 $a \neq -4$

$$L_3: z = \underline{\frac{a-4}{a+4}}$$

$$L_2: 2y = z + 1 = \frac{a-4}{a+4} + \frac{a+4}{a+4} = \frac{2a}{a+4} \Rightarrow \underline{y = \frac{a}{a+4}}$$

$$L_1: 2x = 1 - 3z = \frac{a+4}{a+4} - \frac{3a-12}{a+4} = \frac{-2a+16}{a+4} = \frac{2(-a+8)}{a+4}$$

$$\Rightarrow \underline{x = \frac{8-a}{a+4}}$$

Une solution: $\underline{\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{8-a}{a+4}, \frac{a}{a+4}, \frac{a-4}{a+4} \right) \right\}}$

$$\textcircled{1} P(z) = iz^2 - 5z + 1 - 7i$$

$$\Delta = 25 - 4i(1-7i) = 25 - 4i - 28 = -3 - 4i = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2 = a^2 - b^2 + i2ab$$

$$|\Delta| \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} = 5 \end{cases}$$

$$L_1 + L_2: 2a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \underline{a = \pm 1}$$


$$L_2 - L_1: 2b^2 = 8 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

L_2 : a et b ont un signe opposé

$$" \sqrt{\Delta} " = \pm (1 - 2i)$$

les 2 racines de P :

$$z = \frac{5 \pm (1 - 2i)}{2i} = \begin{cases} \frac{6 - 2i}{2i} = \frac{6i + 2}{-2} = \underline{-1 - 3i} \\ \frac{4 + 2i}{2i} = \frac{4i - 2}{-2} = \underline{1 - 2i} \end{cases}$$

$$(2) \quad \left(\frac{1-i}{i}\right)^4 = \frac{(1-i)^4}{i^4} = (1-i)^4 \quad \text{binôme} \quad \text{baf.}$$


$$|1-i| = \sqrt{2} \quad 1-i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

$$(1-i)^4 = \sqrt{2}^4 (e^{-i\pi/4})^4 = 2^2 e^{-i\pi} = -4$$

$$e^{-i\pi} = e^{i\pi} = -1$$

$$\frac{2+3i}{5-i} = \frac{(2+3i) \times (5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{10+2i+15i-3}{26} = \frac{7}{26} + i \frac{17}{26}$$

$$z_1 = 1-i\sqrt{3} \quad |z_1| = 2 \quad z_1 = 2 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\pi/3}$$


$$z_2 = \frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{e^{i\pi/4}}{e^{-i\pi/4}} = e^{i(\pi/4 + \pi/4)} = e^{i\pi/2} = i$$

$$z_3 = -5 = \underline{5e^{i\pi}}$$

$$z_4 = (z_2)^{16} = \left(e^{i\pi/2}\right)^{16} = e^{i8\pi} = \underline{e^{i0}} = 1$$

$$\textcircled{4} \quad z_1 = 6e^{5i\pi/6} = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -3\sqrt{3} + i3$$



$$z_2 = 18e^{19i\pi/2} = 18e^{i(\frac{\pi}{2} + 9\pi)} = 18e^{i\pi/2} e^{i9\pi} \\ = 18i e^{i\pi} \quad \leftarrow \text{on a Euler } 8\pi$$

Wichtig: $f(x) = \frac{\ln(x)}{1-x}$ DL à l'ordre 3 en $x=1 = -18i$

chgt $X = x-1 \Rightarrow x = 1+X$

$$f(x) = \frac{\ln(1+X)}{-X} = \frac{X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \mathcal{O}(X^4)}{-X} = -1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{3} + \frac{X^3}{4} + \mathcal{O}(X^3)$$

type: $y = -1 + \frac{x-1}{2}$

$$\underline{f(x) = -1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(x-1)^3}{4} + \mathcal{O}((x-1)^3)}$$

combis en dessous car $-\frac{(2x-1)^2}{3} \ll 0$

$$\lim_{0} \frac{x(2x^2 - \ln(\cos(3x)))}{\tan x - \sin x} = ?$$

$$\begin{array}{l|l} \sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) & 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \\ - (x - \frac{x^3}{2} + O(x^5)) & x + \frac{x^3}{3} \\ \hline & \frac{x^3}{3} + O(x^5) \end{array}$$

$$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{-1+3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\underline{\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + O(x^5)}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \Rightarrow \cos(3x) = 1 - \frac{9x^2}{2} + O(x^4)$$

$$\ln(\cos(3x)) = \ln\left(1 - \frac{9x^2}{2} + O(x^4)\right) = -\frac{9x^2}{2} + O(x^4) \quad \text{car } \ln(1-x) = -x \dots$$

$$\frac{x\left(x^2 + \frac{9}{2}x^2 + O(x^4)\right)}{x + \frac{x^3}{3} - \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)} = \frac{\frac{10}{2}x^3 + O(x^5)}{\frac{1}{2}x^3 + O(x^5)}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{x^3 \left(\frac{10}{2} + O(1)\right)}{x^3 \left(\frac{1}{2} + O(1)\right)} \rightarrow \frac{\frac{10}{2}}{\frac{1}{2}} = 10$$

$$3) \sqrt{x+x^2} \underset{0}{\sim} \sqrt{x} \quad \text{car} \quad \frac{\sqrt{x+x^2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\sqrt{x+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x^2} = x \quad \text{car} \quad \frac{\sqrt{x+x^2}}{x} = \sqrt{\frac{x+x^2}{x^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2+3x-2} \quad \text{chgt } X=x-1$$

$$= \sqrt{-(x^2+2x+1)+3x+3-2} = \sqrt{X-X^2} \underset{X \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{X} = \underline{\underline{\sqrt{x-1}}}$$

III Familles libres ou liées

def: La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est liée lorsque

il existe $a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ tels que $a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_p\vec{u}_p = \vec{0}$
pas tous nuls

def: La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est libre lorsque elle n'est pas liée.

cà d :

Si $a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_p\vec{u}_p = \vec{0}$, alors $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$

ex: $\vec{u} = (1, 2, 3)$; $\vec{v} = (4, 5, 6)$ et $\vec{w} \in (6; 9; 12)$
 la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle libre ou liée ?

$$\text{pivot} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{4\vec{u}-\vec{v} \\ 6\vec{u}-\vec{w}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{3} & 3 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{4\vec{v}-\vec{v} \\ 6\vec{v}-\vec{w}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{0} = \vec{c}_2 - \vec{c}_3 = (4\vec{u} - \vec{v}) - (6\vec{u} - \vec{w}) = -2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

$\vec{0} = \vec{c}_2 - \vec{c}_3 = -\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

Liés

remarque: Si il n'y a pas de colonnes de 0, la famille est libre

les colonnes de 0 donnent les relations entre les vecteurs

$$\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$$

c'est un plan

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 3t' \\ z = 3t + 6t' \end{cases} \text{ où } t, t' \in \mathbb{R}$$

$$\dim(\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})) = 2$$

remarque: les colonnes non nulles (après le pivot) donnent la dimension de $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

def: Le rang de la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré par $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$

$$\text{rang}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) = \dim(\text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p))$$

En pratique, pour trouver le rang, on fait le pivot.

les colonnes non nulles donnent le rang.

IV Bases de \mathbb{R}^n

def: Une base de \mathbb{R}^n est une famille de n vecteurs libres

La base la plus simple de \mathbb{R}^2 est $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ base canonique de \mathbb{R}^2

dans \mathbb{R}^3 $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ base canonique de \mathbb{R}^3

ex1: $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ avec $\vec{u} = (1, 2, 3)$ $\vec{v} = (4, 5, 6)$ et $\vec{w} = (6, 9, 12)$.

Cette famille est liée, donc ce n'est pas une base de \mathbb{R}^3 .

ex2: $\vec{u} = (1, 2, 3)$ $\vec{v} = (0, -1, 1)$ $\vec{w} = (2, 3, 6)$

Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{-1} & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} - \vec{u} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ C_2 + C_3 \end{matrix}$$

Il n'y a pas de colonnes de 0, donc la famille est libre

donc \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3

def: les coordonnées d'un vecteur \vec{u} dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ de \mathbb{R}^n sont les a_1, a_2, \dots, a_n tels que $\vec{u} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n$

$$\text{on écrit } \vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

ex: dans \mathbb{R}^3 . \mathcal{B}_1 est la base canonique de \mathbb{R}^3 c.à.d

$$\mathcal{B}_1 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \quad \text{où } \vec{i} = (1, 0, 0) \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \text{et } \vec{k} = (0, 0, 1)$$

$$\mathcal{B}_2 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \quad \text{avec } \vec{u} = (1, 2, 3) : \vec{v} = (0, -1, 1) \quad \text{et } \vec{w} = (2, 3, 6)$$

$$\vec{u} = (1, 2, 3) = 1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

$$\vec{u} = 1\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

$$\vec{u} + 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

et dans \mathcal{B}_1 :

$$\vec{u} + 2\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$