

~~exercice~~

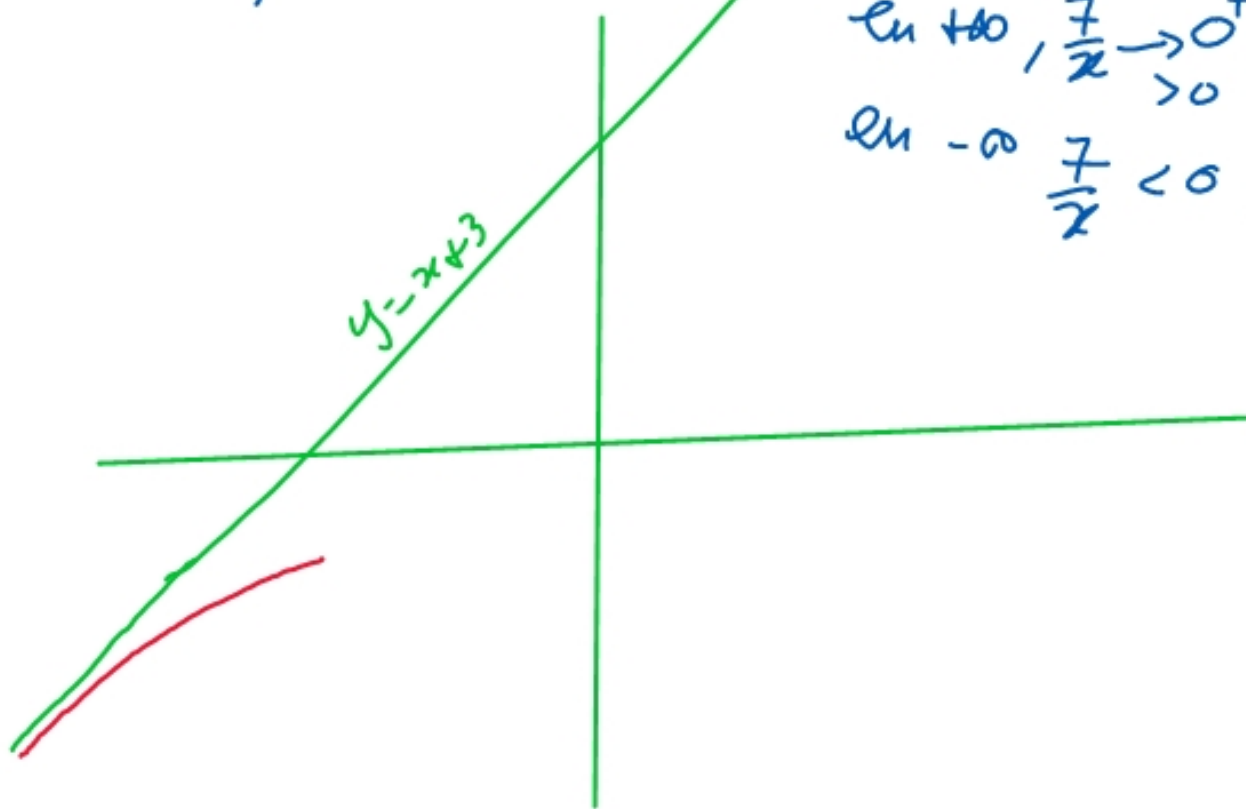
(9.2) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2}$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x + 1 & x - 2 \\ - (x^2 - 2x) & \\ \hline 3x + 1 & \\ - (3x - 6) & \\ \hline 7 & \end{array}$$

$$f(x) = x + 3 + \frac{7}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ qd } x \rightarrow +\infty$$

droite asymptote $y = x + 3$

en $+\infty$, $\frac{7}{x} \rightarrow 0^+$, donc la courbe est au dessus
en $-\infty$, $\frac{7}{x} < 0$, ————— en dessous



④

$$e^{4x} = e^{3x} \cdot e^x$$

on le dérive n fois

$$e^{4x}' = 4e^{4x} \quad e^{4x''} = 4^2 e^{4x}$$

$$(e^{4x})^{(k)} = 4^k e^{4x}$$

$$\text{et } (e^{3x})^{(k)} = 3^k e^{3x}$$

$$4^n e^{4x} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{3x})^{(k)} (e^x)^{(n-k)}$$

$$4^n e^{4x} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k e^{3x} \cdot e^x$$

$$4^n \cancel{e^{4x}} = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k \right) \cancel{e^{4x}}$$

Réurrence ① $I_0 = 1$ ok

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} \quad \forall n$$

② $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$ Juchidescka $I_1 = \frac{2}{3}$ ok

Hérédité: Je prends un $n \geq 1$. Je suppose que $I_n = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$

On sait que $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n \quad (Q1)$

$$I_{n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+2)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)(2n+3)}$$

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^1 1 \cdot (1-x^2)^n dx$$

$$\begin{array}{l} \text{PPP} \\ \left| \begin{array}{l} u = (1-x^2)^n \\ v' = 1 \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} u' = n(1-x^2)^{n-1} \cdot (-2x) \\ v = x \end{array}$$

$$I_n = \left[(1-x^2)^n x \right]_0^1 - \int_0^1 -2n x^2 (1-x^2)^{n-1} dx$$

$$I_n = 0 - 0 + 2n \int_0^1 \underbrace{x^2}_{1 - (1-x^2) = x^2} (1-x^2)^{n-1} dx$$

$$I_n = 2n \int_0^1 (1 - (1-x^2)) (1-x^2)^{n-1} dx = 2n \left(\underbrace{\int_0^1 (1-x^2)^{n-1} dx}_{I_{n-1}} - \underbrace{\int_0^1 (1-x^2)^n dx}_{I_n} \right)$$

$$I_n = 2n I_{n-1} - 2n I_n \Rightarrow (2n+1) I_n = 2n I_{n-1} \Rightarrow \boxed{\frac{I_n}{n} = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}}$$

$$2 \cdot 4 \cdot \dots \quad (2n) = \underbrace{2 \cdot 1}_{2} \times \underbrace{2 \cdot 2}_{2} \times \underbrace{2 \cdot 3}_{2} \cdot \dots \times \underbrace{2 \cdot n}_{2}$$

$$= 2^n n!$$

$$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \quad (2n+1) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

$$I_n = \frac{\text{paris}}{\text{imparis}} = \frac{2^n n!}{\frac{(2n+1)!}{2^n n!}} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Equa diff: $2xy' - 3y = 4x^5$

Hom: $y_H = Ae^{-\int \frac{b}{a}}$ $= Ae^{-\int \frac{3}{2x} dx} = Ae^{\int \frac{3}{2x} dx}$
 $= Ae^{\frac{3}{2} \int \frac{1}{x} dx} = Ae^{\frac{3}{2} \ln(x)} = Ae^{\ln(x^{3/2})}$
 $y_H = Ax^{3/2}$

Sol part: $y_p = A(x)x^{3/2}$ $y_p' = A'(x)x^{3/2} + \frac{3}{2}A(x)x^{1/2}$

$$2xy_p' - 3y_p = 2A'(x)x^{5/2} + \frac{3}{2}A(x)x^{3/2} - 3A(x)x^{3/2} = 4x^5$$

$$\Rightarrow 2A' = 4 \frac{x^5}{x^{5/2}} \Rightarrow A' = 2x^{5/2} \Rightarrow A = 2 \frac{x^{7/2}}{7/2} = \frac{4}{7}x^{7/2} = A$$

$$\Rightarrow y_p = A(x) \cdot x^{3/2} = \frac{4}{7}x^{7/2} \cdot x^{3/2}$$

$$y_p = \frac{4}{7}x^5$$

Espaces Vectoriels dans \mathbb{R}^n

I les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n

def. Un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n (noté s.e.v.) est un sous-ensemble E de \mathbb{R}^n qui

- contient $\vec{0}$
- stable pour $+$
- stable pour \cdot (\cdot multiplication par un scalaire)

Rappel: E ($\subset \mathbb{R}^n$) est stable pour l'addition lorsque

si \vec{u} et $\vec{v} \in E$, alors $\vec{u} + \vec{v} \in E$

E est stable pour la multiplication par un scalaire lorsque

si $\vec{u} \in E$
et
 $a \in \mathbb{R}$, alors $a \cdot \vec{u} \in E$

Ex 1: $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 5 \right\}$ c'est une droite

Montrer que E est un s.e.v de \mathbb{R}^2

$B = (1, 1) \in E$ car $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$

$J = (2; \frac{1}{3}) \in E$

$B + J = (3; \frac{4}{3}) = A$

$2 \cdot 3 + \frac{4}{3} \cdot 3 = 6 + 4 = 10 \neq 5$, donc $A \notin E$

donc E n'est pas stable par +

donc E n'est pas un sev de \mathbb{R}^2

ex2 : Montrer que $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 3y = 0\}$ est un sous-espace de \mathbb{R}^2

• $2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$, donc $(0, 0) = \underline{\vec{0}} \in E$

• Stabilité par +: Je prends $\underline{\vec{u}} = (x, y)$ et $\underline{\vec{v}} = (x', y') \in E$

$$\underline{\vec{u}} + \underline{\vec{v}} = (x + x', y + y')$$

$$2x(x + x') + 3(y + y') = 2x + 2x' + 3y + 3y' \\ = (2x + 3y) + (2x' + 3y')$$

$$= \underset{\substack{\circ \\ \text{car } \underline{\vec{u}} \in E}}{\circ} + \underset{\substack{\circ \\ \text{car } \underline{\vec{v}} \in E}}{\circ} = \circ$$

donc $\underline{\vec{u}} + \underline{\vec{v}} \in E$

donc E est stable par +

• stabilité par. Je prends $\vec{u} \in E$ et $a \in \mathbb{R}$
" (x, y)

$$a \cdot \vec{u} = (ax; ay)$$

$$2 \cdot ax + 3 \cdot ay = a(2x + 3y) = a \cdot 0 \text{ car } \vec{u} \in E$$

$$= 0 \text{ donc } a\vec{u} \in E$$

donc E est stable par.

E est un sev de \mathbb{R}^2

En fait, les sev de \mathbb{R}^2 sont

}	$\{\vec{0}\}$	← dimension 0
	toutes les droites vectorielles	← dimension 1
	\mathbb{R}^2	← dimension 2

les s.e.v de \mathbb{R}^3 sont

}	$\vec{0}$	(de dimension 0)
	les droites vectorielles	(de dim 1)
	les plans vectoriels	(de dim 2)
	\mathbb{R}^3	(de dimension 3)

II Combinaisons Linéaires

def: Une combinaison linéaire des p vecteurs de \mathbb{R}^n $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p$

est
$$\vec{u} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_p \vec{e}_p$$

ex: Une combinaison linéaire de \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} est $2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$

prop: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ et un s.e.v de \mathbb{R}^n a une dim $\leq n$

↑
dimension

def: L'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p \in \mathbb{R}^n$
est noté $\text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ et s'appelle l'espace vectoriel
engendré par
 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$

ex 1: C'est quoi $\text{Vect}(\underbrace{(1,3)}_{\vec{u}}; \underbrace{(-2,-6)}_{\vec{v}})$? on l'appelle E

E est l'ensemble des combinaisons linéaires de \vec{u} et \vec{v}

$E = \{ a\vec{u} + b\vec{v} \text{ où } a \text{ et } b \in \mathbb{R} \}$ c'est a priori un plan

mais $\vec{v} = -2\vec{u}$, donc c'est la droite de vecteur directeur \vec{u}

$$E = \{ a\vec{u} / a \in \mathbb{R} \}.$$