

~~reviser~~

- ① Dérivée de $\arctan(x)$ $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- ② Dérivées de $\tan(x)$ $\tan'(x) = (1 + \tan^2(x)) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- ③ Somme partielle géométrique
 $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \begin{cases} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} & \text{qd } x \neq 1 \\ n+1 & \text{qd } x = 1 \end{cases}$
- ④ DL de $\sin(x)$ à l'ordre 4
- ⑤ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$(2x+3)' = 2$$

$$(x^5)' = 5x^4$$

$$(2x+3)^5' = 5(2x+3)^4 \cdot 2$$

$$(x^{-7})' = -7x^{-8}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x^5}\right)' = (x^{0.5-5})' = (x^{-4.5})' = -4.5x^{-5.5} \\ = -\frac{9}{2} \frac{1}{x^{11/2}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x^3}\right)' = (x^{\frac{1}{2}-3})' = (x^{-5/2})' = -\frac{5}{2}x^{-7/2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2}$$

$$\left(\frac{1}{2x+3}\right)' = -\frac{1}{(2x+3)^2} \cdot 2 = -\frac{2}{(2x+3)^2}$$

$$\textcircled{8} \left(\frac{1}{(2x+3)^5}\right)' = ((2x+3)^{-5})' = -5(2x+3)^{-6} \cdot 2 = -\frac{10}{(2x+3)^6}$$

$$(\sin(2x+3))' = \cos(2x+3) \cdot 2$$

$$(\sin(x^5))' = \cos(x^5) \cdot 5x^4$$

$$(\sin(u))' = \cos(u) \cdot u'$$

$$(\sin^5 x)' = 5 \sin^4 x \cdot \cos x$$

$$\text{car } (u^5)' = 5u^4 \cdot u'$$

ici $u = \sin x$

$$(\ln(2x+3))' = \frac{1}{2x+3} \cdot 2$$

$$(\ln(x^5))' = \frac{1}{x^5} \cdot 5x^4 = \frac{5}{x}$$

$$(\ln(x^5))' = (5 \ln x)' = \frac{5}{x}$$

$$(\ln^5 x)' = 5 \ln^4 x \cdot \frac{1}{x} = 5 \frac{\ln^4 x}{x}$$

$$\text{car } (u^5)' = 5u^4 \cdot u'$$

$$\text{arctan}' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{arctan}(2x+3)' = \frac{1}{1+(2x+3)^2} \cdot 2 = \frac{2}{4x^2+12x+10}$$

$$\arctan(x^5)' = \frac{1}{1+x^{10}} \cdot 5x^4$$

$$\arctan(x^5)' = 5 \arctan^4(x) \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad \text{car } (u^5)' = 5u^4 \cdot u'$$

$$\left(\int_0^2 \frac{\sin x}{2+\cos^2(x)} dx \right)' = [F(x)]_0^2 = (F(2) - F(0))' = 0$$

$$(f(0))' \neq f'(0) \quad (f(0))' = 0$$

Exo 2: $xy' + 2y = \frac{1}{x^2}$ (E)

① $xy' + 2y = 0$ $y_H = A e^{-\int \frac{2}{x} dx} = A e^{-2 \ln x} = A e^{\ln(x^{-2})} = Ax^{-2}$

$$y_H = \frac{A}{x^2} \text{ où } A \in \mathbb{R}$$

② $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ $g'(x) = \frac{\frac{1}{x} x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$

$xg'(x) + 2g(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^2} + 2 \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2}$. Donc g est sol de (E)

③ $y = \frac{A}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}$

$$y = \frac{A + \ln x}{x^2} \text{ où } A \in \mathbb{R}$$

④ $f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{A + 2 \ln 1}{1^2} = 1 \Rightarrow A = 1$ $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$

exo 3 $y'' + y' - 2y = (12x - 5)e^x$

(a) $y'' + y' - 2y = 0$ $X^2 + X - 2 = P(x)$

$\Delta = 1 + 8 = 9$? racis $\frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

Sols $y_H = Ae^{-2x} + Be^x$ ou $A, B \in \mathbb{R}$

(b) $y = (ax^2 + bx)e^x$ $y' = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x$
 $y' = (ax^2 + (2a + b)x + b)e^x$

$y'' = (2ax + 2a + b)e^x + (ax^2 + (2a + b)x + b)e^x$
 $y'' = (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b)e^x$

$y'' + y' - 2y = e^x (\cancel{ax^2} + 4ax + \cancel{bx} + 2a + 2b + \cancel{ax^2} + 2ax + \cancel{bx} + b - 2\cancel{ax^2} - 2\cancel{bx})$
 $= e^x (6ax + 2a + 3b) = e^x (12x - 5) \Rightarrow \begin{cases} 6a = 12 & a = 2 \\ 2a + 3b = -5 & \Rightarrow b = -3 \end{cases}$

$$y_p = (2x^2 - 3x)e^x$$

$$(c) \quad y = Ae^{-2x} + Be^x + (2x^2 - 3x)e^x$$

$$(d) \quad f(0) = 2 \quad \text{et} \quad f'(0) = -1$$

$$f(0) = \boxed{A + B = 2}$$

$$y' = -2Ae^{-2x} + Be^x + (4x - 3)e^x + (2x^2 - 3x)e^x$$

$$f'(0) = -2A + B - 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{-2A + B = 2}$$

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -2A + B = 2 \end{cases}$$

$$L_1 - L_2 : 3A = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow B = 2$$

$$\boxed{f(x) = (2x^2 - 3x + 2)e^x}$$

$$12) f(x) = (2x^2 - 3x + 2)e^x$$

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f = \underbrace{+\infty}_{2x^2 - 3x + 2} \times \underbrace{+\infty}_{e^x} = +\infty$$

$$2x^2 - 3x + 2 \underset{+\infty}{\sim} 2x^2 \rightarrow +\infty$$

$$2x^2 - 3x + 2 = x^2 \left(2 + \frac{-3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 3x + 2)e^x = +\infty \cdot 0 \quad \text{f. I} \rightarrow +\infty \times 0 = +\infty$$

$$\underbrace{2x^2 e^x}_{\forall CC} - \underbrace{3x e^x}_{\forall CC} + \underbrace{2e^x}_0$$

$$(2x^2 - 3x + 2)e^x \underset{-\infty}{\sim} \underbrace{2x^2 e^x}_{-\infty} \rightarrow 0 \quad \forall CC$$

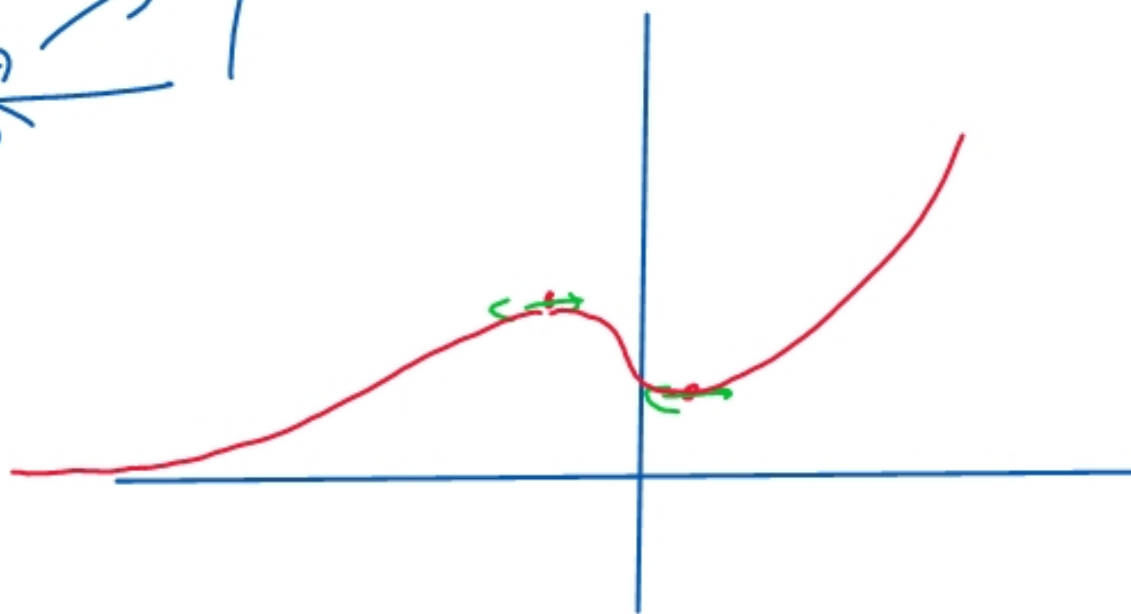
$$f'(x) = (4x - 3)e^x + (2x^2 - 3x + 2)e^x = (2x^2 + x - 1)e^x$$

$$\Delta = 9 \quad x = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -1 \\ 1/2 \end{cases}$$

| x | $-\infty$ | -1 | $1/2$ | $+\infty$ | |
|------|-----------|----|-------|-----------|---|
| f' | + | 0 | - | 0 | + |
| f | | | | | |

← (signe de a à l'ext des racines)

car
 $d'f/dx = 0$



$$A = \int_0^1 (2x^2 - 3x + 2)e^x dx$$

$$\text{IPP} \left| \begin{array}{l} u = 2x^2 - 3x + 2 \quad u' = 4x - 3 \\ v' = e^x \quad v = e^x \end{array} \right.$$

$$A = \left[(2x^2 - 3x + 2)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 (4x - 3)e^x dx$$

$$A = (e^1 - 2) - "$$

$$\text{IPP} \left| \begin{array}{l} u = 4x - 3 \quad u' = 4 \\ v' = e^x \quad v = e^x \end{array} \right.$$

$$= e - 2 - \left(\left[(4x - 3)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 4e^x dx \right)$$

$$= e - 2 - \left(e - 3 - 4[e^x]_0^1 \right) \\ = e - 2 - \left(e - 3 - 4(e - 1) \right) = 4e - 9$$

Systemes linéaires

$$\text{ex 1: } \begin{cases} \boxed{x} + 2y + 3z = 5 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 0 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{matrix}$$

pas de solutions $\mathcal{S} = \emptyset$

$$\text{ex 2: } \begin{cases} \boxed{x} + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -5y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 3 - 2y = 3 - 2 \cdot 1 = 1 \quad \text{Une solution: } (1, 1) \quad \underline{\mathcal{S} = \{(1, 1)\}}$$

$$\text{Ex 3} \quad \begin{cases} \boxed{x} + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{matrix} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -5y + 3z = -2 \\ 2y - \boxed{z} = 1 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{matrix} L_2 + 3L_3 \\ L_3 \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y = 1 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 2y - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \swarrow \begin{matrix} x = 2 - 2y + z = 2 - 2 + 1 = 1 \end{matrix}$$

Unique sol: $(1, 1, 1)$

$$\underline{S = \{(1, 1, 1)\}}$$

ex 4

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 5y - 3z = 2 \\ 5y - 3z = 2 \end{cases} \begin{array}{l} 2L_1 - L_2 \\ L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 5y - 3z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 5y - 3z = 2 \end{cases} \right)$$

$L_3 - L_2$

il y a une infinité de solutions.

Un bon truc. Soit le pivot est terminé, si il y a une as de sol,
On compte le nombre d'inconnues \uparrow moins le nombre d'équation.

c'est la dimension de l'espace des sol
càd, le nombre de paramètres

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 5y - 3z = 2 \end{cases}$$

3 inconnues - 2 eq = dimension 1
càd
1 paramètre

On pose $y = t$ avec $L_2: 3z = 5t - 2 \Rightarrow z = \frac{5}{3}t - \frac{2}{3}$

avec $L_1: x = 2 - 2t + \frac{5}{3}t - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}t + \frac{1}{3} \\ y = t \\ z = \frac{5}{3}t - \frac{2}{3} \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

c'est la droite de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 5/3 \end{pmatrix}$ passant par

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}; t; \frac{5}{3}t - \frac{2}{3} \right) \text{ où } t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{ex 5} \quad \begin{cases} 2x + 4y - 2z = 4 \\ \boxed{x} + 2y - z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 & -2l_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - z = 2$$

3 inconnues - 1 eq = dim 2. 2 paramètres

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t' \end{aligned}$$

$$z = x + 2y - 2 = t + 2t' - 2$$

$$\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = t' \\ z = t + 2t' - 2 \end{cases} \text{ où } (t, t') \in \mathbb{R}^2}$$

c'est le plan de vecteurs directeurs
 $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ passant par le
 point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$Y = \left\{ (t; t'; t + 2t' - 2) \text{ où } (t, t') \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

ex 6 dans \mathbb{R}^2 $\{x+2y=3$ 2 unic - 1 eq = 1 par
avec $y=t$: $x=-2t+3$ $\mathcal{L} = \{(t; -2t+3) \text{ où } t \in \mathbb{R}\}$.

ex 7 dans \mathbb{R}^3 $\{x+2y=3$ 3 unicous - 1 eq = 2 para
avec $y=t \Rightarrow x=-2t+3$ $z=t'$

$\mathcal{L} = \{(-2t+3; t; t') \text{ où } t \text{ et } t' \in \mathbb{R}\}$

ex 8

$$\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{cases} \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ t = 1 \\ 4t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$

4 inconnues - 2 eq = dimension 2 2 paramètres

$$x = a ; \quad y = b \quad z = -3a - 4b - 2 + 3 = -3a - 4b + 1$$

$t = 1$

$$Y = \left\{ (a; b; -3a - 4b + 1; 1) \text{ où } a \text{ et } b \in \mathbb{R} \right\}$$

c'est le plan de \mathbb{R}^4 de vecteur directeur
 $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 passant par $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$