

IV Formule de Leibnitz

rappel: $(fg)' = f'g + fg'$

$$(fg)'' = \underline{(f'g + fg')} = f''g + \underline{f'g'} + \underline{f'g'} + fg'' \\ = f''g + 2f'g' + fg''$$

$$(fg)''' = \underline{(f''g + 2f'g' + fg'')} = \underline{f''g} + \underline{f''g'} + 2(f'g'' + f'g'') + f'g''' + fg''' \\ = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

on peut vérifier que

$$(fg)'''' = f''''g + 4f''''g' + 6f''''g'' + 4f''''g''' + fg''''$$

Cas général : $f^{(k)}$ désigne la dérivée k fois de f
en particulier : $f^{(0)} = f$

Formule de Leibnitz :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

[réécriture : Inductivité : pour $n=1$

$$(fg)' = fg' + fg' \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} f^{(1-k)} g^{(k)} = \underbrace{\binom{1}{0} f' g}_{\text{pour } k=0} + \underbrace{\binom{1}{1} fg'}_{\text{pour } k=1}$$

OK!

Hérédité: On prend un $n \geq 1$. On suppose que $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$

$$\begin{aligned}
 (fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[f^{(n-k)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)} \\
 &\quad \text{constant} \qquad \qquad \qquad \text{pas constant: décalage} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n-k+1)} g^{(k)} \\
 &= \binom{n}{0} f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g \right) \\
 &= 1 f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] f^{(n-k)} g^{(k)} + 1 f^{(n+1)} g
 \end{aligned}$$

$$(bg)^{(n+1)} = b g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} b g^{(k)} + b g^{(n+1)}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{formule de Pascal}}$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b g^{(k)} \quad \text{FIN}$$

Conclusion: D'après le principe de récurrence: $\forall n \geq 1, (bg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b g^{(k)}$

□

ex: Quelle est la dérivée 7^{ième} de $f(x) = x^2 e^x$

$$f^{(7)}(x) = (x^2 e^x)^{(7)} = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} (x^2)^{(k)} (e^x)^{(7-k)}$$

$$= \binom{7}{0} x^2 e^x + \binom{7}{1} 2x e^x + \binom{7}{2} 2e^x + 0 + \dots + 0$$

rappel: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\binom{7}{0} = 1$

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{1!6!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 6} = 7$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \dots \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \times \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \dots \cdot 5} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 3 \cdot 7 = 21$$

$$f^{(7)}(x) = (x^2 + 14x + 42)e^x$$

V Théorème des accroissements finis

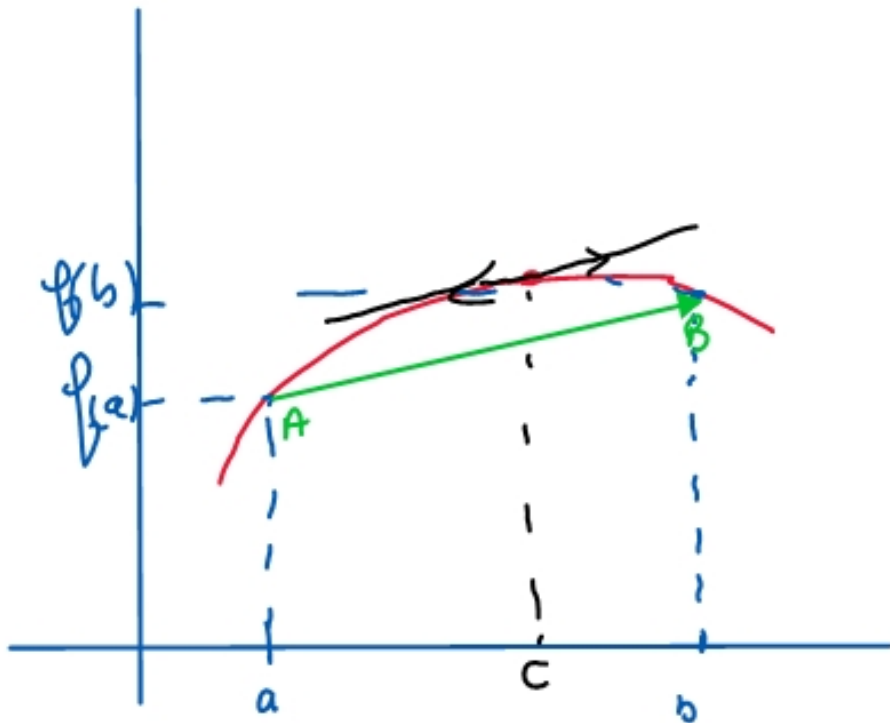
T.A.F Si f est de classe C^1 sur $[a; b]$, alors
il existe c tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est la pente de \vec{AB}

$f'(c)$ est la pente de la tangente
à la courbe en c



Inégalité des Accroissements Finis:

IAF

Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq M |x - y|$$

$$\text{où } M = \sup_{c \in [a, b]} |f'(c)|$$

applications: étude de suites (plus tard).

VI Étude de fonctions

On veut représenter la courbe $y = f(x)$
↑ ordonnées ↑ abscisses

méthode : ① On cherche l'ensemble de définition

② On calcule f' ③ On cherche les zéros de f'

④ On fait le tableau de variation

si $f' > 0$ alors f est croissante

si $f' < 0$ ——— décroissante

⑤ Calculs des valeurs et limites aux points du tableau

• En un point $A(a, f(a))$, on donne la pente ^{de la tangente} (parfois ég. de la droite)

la pente en $A(a, f(a))$ est $f'(a)$

En un point, la pente est la dérivée

• Si on a une branche infinie ($x \rightarrow \infty$ ou $y \rightarrow \infty$), on cherche une éventuelle droite asymptote

def: f et g sont asymptote en $+\infty$ lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = 0$

asymptotes horizontales: Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, alors il y a une asymptote d'eq $y = a$

asymptotes verticales ($x \rightarrow a; y \rightarrow \infty$)

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, alors il y a une asymptote d'eq $x = a$

asymptotes obliques (x et $y \rightarrow \infty$)

$y = ax + b$ est asymptote \Leftrightarrow

$$a = \lim_{\infty} \frac{y}{x} = \lim_{\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{et } b = \lim_{\infty} y - ax = \lim_{\infty} f(x) - ax$$

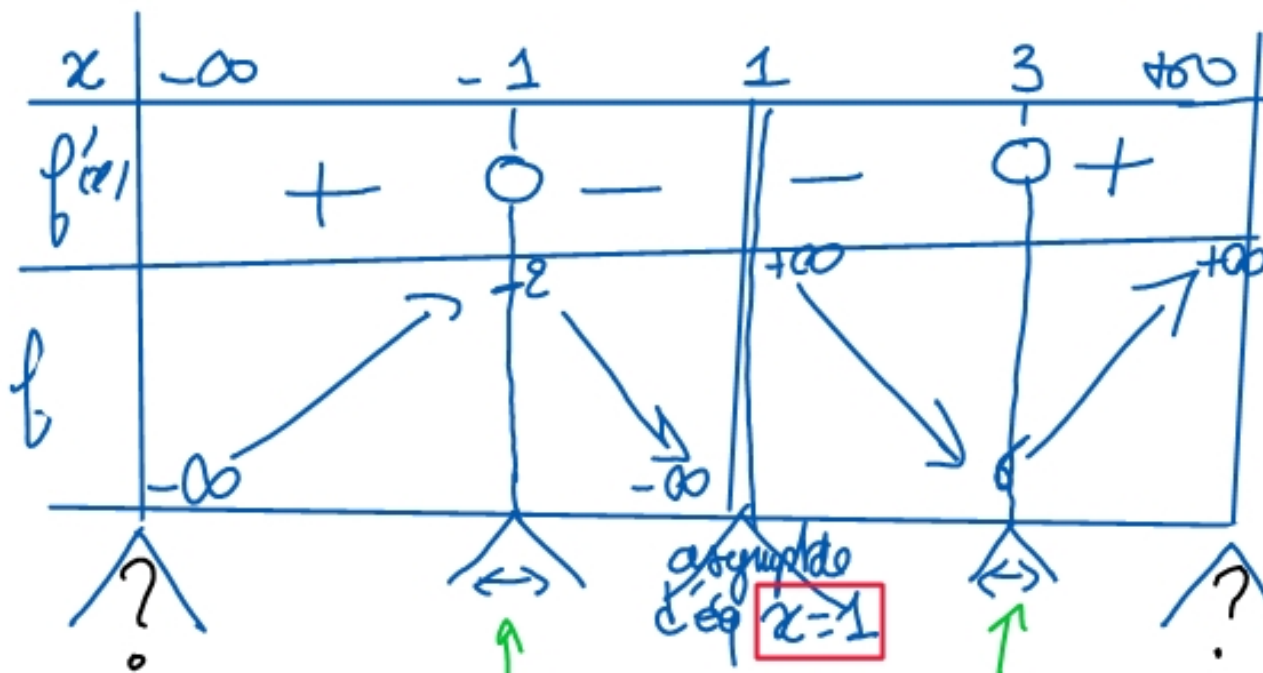
Exemple 1: Etude $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+3) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$

f' est du signe de $x^2 - 2x - 3$ car $(x-1)^2 > 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16$ deux racines: $\frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$



\leftarrow signe de f' à l'extérieur des racines.

$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$

$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{4}{0} = \infty$

$\bullet f(-1) = \frac{4}{-2} = -2$

$\bullet f(3) = \frac{9+3}{2} = 6$

En l' ∞ , y a-t-il une asymptote oblique

asymptote oblique qd $x \rightarrow \pm \infty$:

méthode

bonnin

$$a = \lim_{\infty} \frac{y}{x} = \lim_{\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\infty} \frac{\frac{x^2+3}{x-1}}{x} = \lim_{\infty} \frac{x^2+3}{x(x-1)}$$

$$= \lim_{\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{\infty} (y - ax) = \lim_{\infty} (f(x) - 1x) = \lim_{\infty} \frac{x^2+3}{x-1} - x$$

$$= \lim_{\infty} \frac{x^2+3 - (x^2-x)}{x-1} = \lim_{\infty} \frac{x+3}{x-1} = 1$$

asymptote d'ob

$$y = x + 1$$

2^{ème} méthode

$$\begin{array}{r} x^2+3 \\ -(x^2-x) \\ \hline x+3 \\ -(x-1) \\ \hline 4 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x-1 \\ \hline x+1 + \frac{4}{x} + \dots \end{array} \right.$$

$$f(x) = x + 1 + \left(\frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

développement asymptotique

asymptote d'ob $y = x + 1$: Courbe au dessus en $+\infty$
 au dessous de $\frac{4}{x}$ \rightarrow en dessous en $-\infty$