

Full

ex1 $z_1 = \sqrt{3} + i$ $|z_1| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
 $z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2e^{i\pi/6}$



$z_2 = -1 + i$ $|z_2| = \sqrt{2}$
 $z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$



$z_3 = -3 = 3e^{i\pi}$

$z_4 = z_1 \times z_2 = 2e^{i\pi/6} \times \sqrt{2}e^{i3\pi/4} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4})}$
 $= 2\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi+9\pi}{12}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$

$-1 = e^{i\pi} = e^{-i\pi}$

$z_5 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\pi/6}}{\sqrt{2}e^{i3\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$z_6 = z_1^8 = (2e^{i\pi/6})^8 = 2^8 e^{i\frac{\pi}{6} \times 8} = 256 e^{i\frac{4\pi}{3}} = 256 e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$$\textcircled{2} \quad z_1 = 5e^{i\pi/3} = 5\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2} + i\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = -7e^{-i\pi} = -7 \times (-1) = 7$$



$$z_9 = 2e^{i5\pi/6} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_{16} = 8e^{i17\pi/2} = 8e^{i(4+1)\pi} = 8e^{i8\pi + i\pi/2} = 8e^{i\pi/2} = 8i$$

$$\textcircled{3} \quad z^2 + 3z + 5 = 0 \quad \Delta = 9 - 20 = -11 = (i\sqrt{11})^2$$

$$2 \text{ roots} \quad \frac{-3 \pm i\sqrt{11}}{2}$$

$$(5) (1) z^2 + 12 = 0 \quad z^2 = -12 \quad z = \pm \sqrt{12}i = \pm 2\sqrt{3}i$$

$$|z| = 2\sqrt{3} \quad \arg(z) = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Re}(z) = 0 \quad \operatorname{Im} = \pm 2\sqrt{3}$$

$$(2) z = 1 + i\sqrt{3} \quad |z| = 2 \quad z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi/3}$$

$$z^2 = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow \left(z = \sqrt{1 + i\sqrt{3}} \right)$$

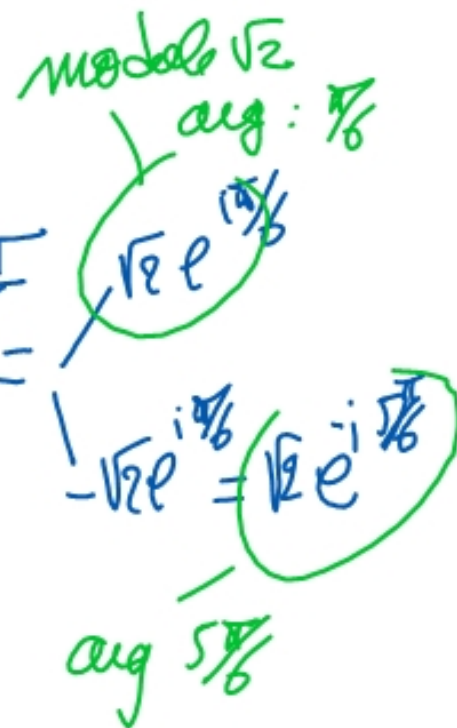
$$\parallel$$

$$2e^{i\pi/3}$$

les racines carrées de $2e^{i\pi/3}$ sont $\pm \sqrt{2}e^{i\pi/6} =$

$$\pm \sqrt{2}(e^{i\pi/6}) = \pm \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \pm$$

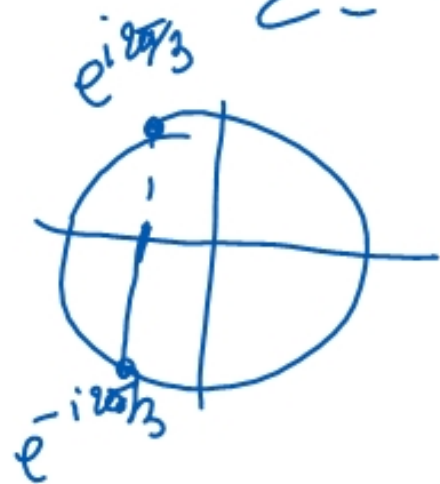
$\uparrow \operatorname{Re}$ \uparrow



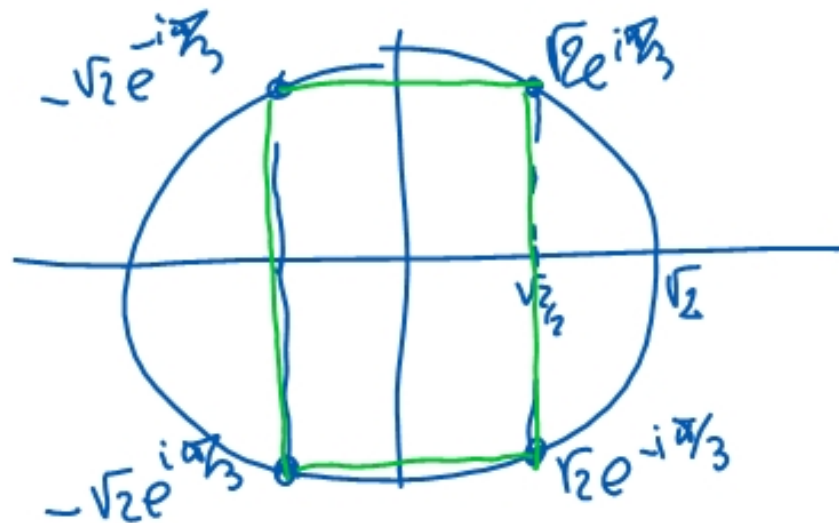
③ $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$ On pose $Z = z^2$

$Z^2 + 2Z + 4 = 0$ $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$

$Z = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



les racines carrées de $2e^{i2\pi/3}$ sont $\pm\sqrt{2}e^{i\pi/3}$
 $+2e^{-i2\pi/3}$ sont $\pm\sqrt{2}e^{-i\pi/3}$



$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{1}{f^2} \times \underline{\underline{f'}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f \circ g)' = f'(g) \times \underline{\underline{g'}}$$

$$(e^{ax})' = 2 e^{ax}$$

$$\sin(2x) = \cos(2x) \cdot 2$$

$$(u^2)' = 2u \times \underline{\underline{u'}}$$

$$(u^3)' = 3u^2 \times u'$$

$$(\sin^3 x)' = 3 \sin^2 x \cdot \cos x$$

$$(\sin(x^3))' = \cos(x^3) \cdot 3x^2$$

$$\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$\begin{aligned} \boxed{\tan(x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}} \\ = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad \boxed{} \end{aligned}$$

$$\left(\tan(x^2)\right)' = \frac{1}{\cos(x^2)} \cdot 2x \quad (u^2)' = 2u \cdot u'$$

$$\left(\tan^2(x)\right)' = 2 \cdot \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

le réciproque : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} = \frac{1}{f'[f^{-1}]}$

exemple 1 : $(\operatorname{arctanh} x)' = \frac{1}{1 + \tanh^2[\operatorname{arctanh} x]} = \frac{1}{1 + x^2}$

ex 2 : $(\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsin} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\operatorname{arcsin} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\cos^2 + \sin^2 = 1$

important :

$$\operatorname{arctanh} x' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\operatorname{arcsin} x' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

III 4 façons de montrer qu'une fonction est dérivable

① La phrase magique : "f est dérivable comme produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas), composée, ..."

② La définition : f est dérivable en a lorsque $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie

③ L'existence d'un DL à l'ordre 1

$$\text{Si } f(x) = a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$$

alors f est dérivable en a et $f'(a) = a_1$

④ Si $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue en a} \\ f \text{ est dérivable autour de a} \\ \lim_{x \rightarrow a} f'(x) \text{ existe et est finie} \end{array} \right\}$, alors $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable en a} \\ \text{et} \\ f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x) \end{array} \right\}$

la limite de f' :

ex : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $|x| \mapsto \frac{\sin x}{x}$ qd $x \neq 0$
 $|0 \mapsto f(0) = 1$

Montrer que f est continue,
 puis dérivable, p. 1, la classe C^1
 sur \mathbb{R} .

Continuité : pour $x \neq 0$: f est continue comme quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues

pour $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{\sin x}{x}) = 1 = f(0)$

donc f est aussi continue en 0

conclusion : f est continue sur \mathbb{R}

dérivabilité : pour $x \neq 0$: f est dérivable comme quotient (...)
 de fonctions dérivables

et $f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin x}{x^2}$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{x + o(x^2)}{x} = 1 + o(x) = 1 + o(x) + o(x)$$

f possède un DL à l'ordre 1 en 0, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

Classe C^1 ? Rappel: f est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \iff$ $\left. \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ f' \text{ est continue sur } \mathbb{R} \end{array} \right\}$

Il reste à prouver que f' est continue

• pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

f' est continue comme somme, produit et quotient (dont le dénominateur s'annule pas) de fonctions continues

• pb en 0: Il faut montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} &= \frac{x(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)) - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))}{x^2} = \frac{x^3(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}) + o(x^3)}{x^2} \\ &= -\frac{1}{3}x + o(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f'(0). \quad \text{FIN} \end{aligned}$$