

ex: Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$ lorsque f est continue sur $[0, 1]$

[Théorème des Valeurs Intermédiaires : $f([0, 1]) = [m, M]$ où m et $M \in \mathbb{R}$.

donc $\forall t \in [0, 1] \quad m \leq f(t) \leq M$

On multiplie par t^n : $\forall t \in [0, 1] \quad m t^n \leq f(t) t^n \leq M t^n$

on intègre : $\int_0^1 m t^n dt \leq \int_0^1 f(t) t^n dt \leq \int_0^1 M t^n dt$

$$m \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq \int_0^1 f(t) t^n dt \leq M \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\frac{m}{n+1} \leq \int_0^1 f(t) t^n dt \leq \frac{M}{n+1}$$

$$\begin{array}{c} n \rightarrow +\infty \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} n \rightarrow +\infty \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$$

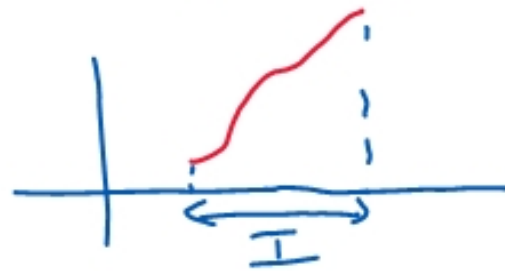
donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) t^n dt = 0$]

c'est le T des
petits termes

IV Théorème de la bijection

def : I est un intervalle de \mathbb{R} . $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante (strictement croissante)
lorsque

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$$



def : I est un intervalle de \mathbb{R} . $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est décroissante (strictement décroissante)
lorsque

$$\forall x \in I, \forall y \in I \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \quad (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$$

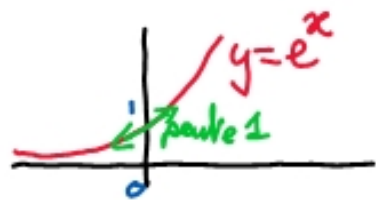


def: I est un intervalle de \mathbb{R} . $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone (strictement monotone)
 lorsque f est décroissante (et...) ou croissante (et...)

[1] I est un intervalle de \mathbb{R} $f|_I \rightarrow \mathbb{R}$

Si $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } I \\ \text{et} \\ f \text{ est strictement monotone} \end{array} \right.$, alors f est bijective de I dans $f(I) = J$

ex: $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto e^x$



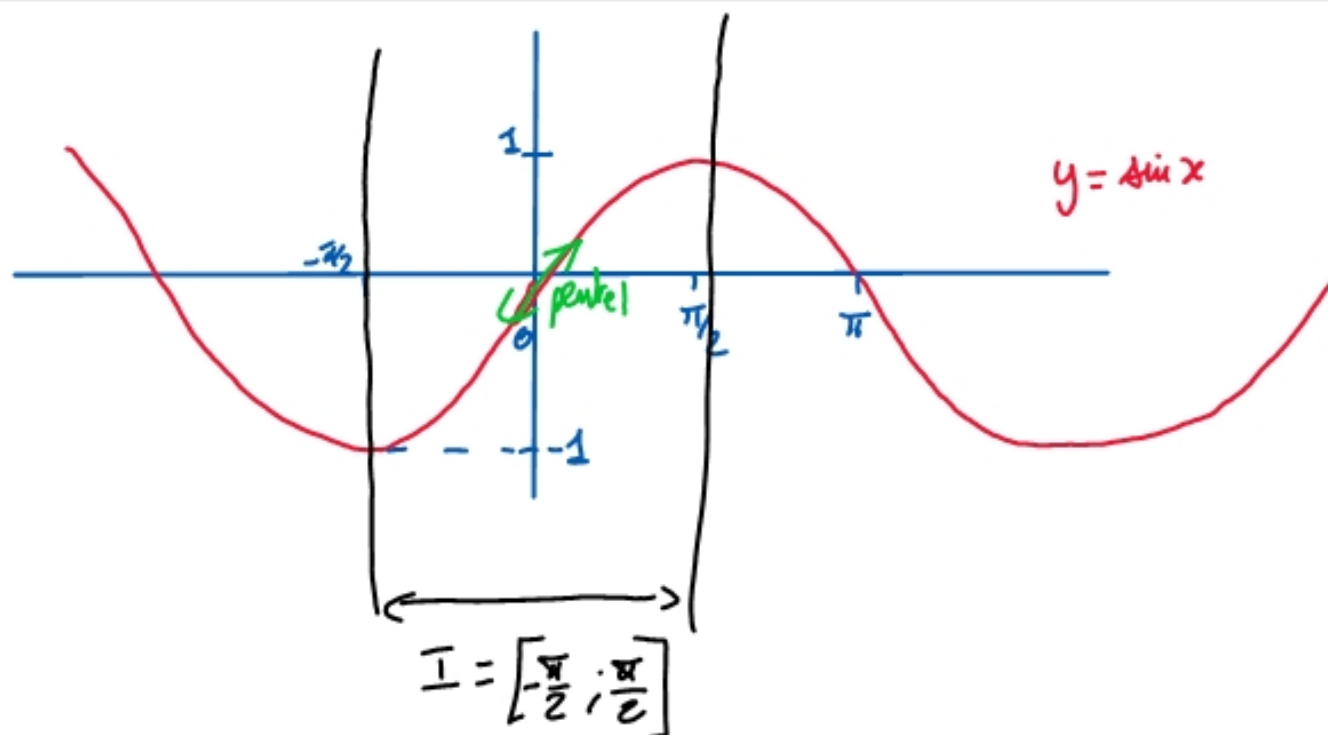
\exp est strictement croissante et continue,
 donc c'est une bijection de \mathbb{R} dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{++}$

La réciproque est $\ln: \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln(x)$

càd f a une réciproque
 notée $f^{-1}: J \rightarrow I$

$$\left(\begin{array}{l} f \circ f^{-1}(x) = x \quad \forall x \in J \\ f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in I \end{array} \right)$$

ex $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin x$



$g: [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin x$

est strictement croissante et continue, donc
 bijective de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ dans $g([-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]) = [-1; 1]$

La réciproque est notée arcsin $[-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
 $x \mapsto \arcsin x$

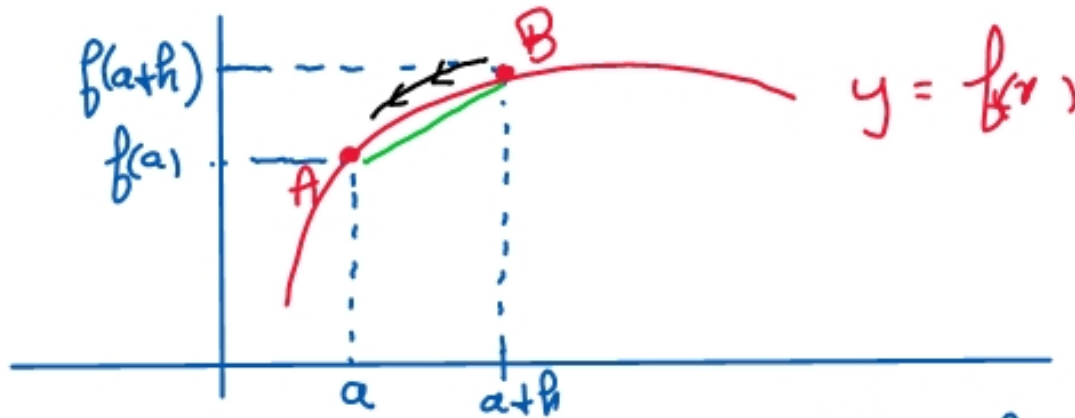
DERIVATION

I Généralités

def: f est dérivable en a lorsque

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe et est finie}$$

c'est le nombre dérivé en a
noté $f'(a)$



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} a+h-a \\ f(a+h)-f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ f(a+h)-f(a) \end{pmatrix}$$

$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est la pente de \vec{AB}

la limite est la pente de la tangente

exemple $f(x) = x^2$ $f'(a) = ?$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{a^2} + 2ha + h^2 - \cancel{a^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h = 2a$$

dérivées des fonctions classiques: $(x^n)' = n x^{n-1}$; $(e^x)' = e^x$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$\sin' x = \cos x$; $\cos' x = -\sin x$; $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$; $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$

équation de la tangente en a: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

dérivée à droite: $f'_d(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

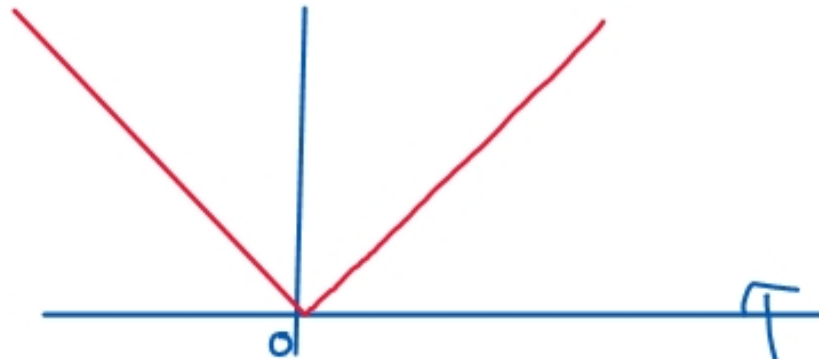
dérivée à gauche: $f'_g(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

qd $f'_d(a) = f'_g(a)$, la fonction f est dérivable (il n'y a pas d'angle en a)

ex.: valeur absolue

Elle est continue sur \mathbb{R}

Elle n'est pas dérivable en 0



Dérivable \Rightarrow continue

⚠ ça ne marche pas dans l'autre sens

def: I est un intervalle de \mathbb{R} . f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en a ,
pour tout $a \in I$

[T] les fonctions classiques sont dérivables sur leur ensemble de définition

def: I est un intervalle de \mathbb{R} . f est de classe C^1 sur I lorsque
 f est dérivable et f' est continue

[T] classe $C^1 \Rightarrow$ dérivable \Rightarrow continue

def: f est deux fois dérivable en a lorsque f' est dérivable en a

[T] dérivable 2 fois \Rightarrow de classe $C^1 \Rightarrow$ dérivable \Rightarrow continue

def: f est de classe C^2 lorsque f est deux fois dérivable et f'' est continue

def: f est de classe C^∞ lorsque f est dérivable n fois, pour tout n
et
(les dérivées sont continues)

classe $C^\infty \Rightarrow$ classe $C^n \dots$ classe $C^2 \Rightarrow$ dérivable 2 fois \Rightarrow classe C^1 , dérivable \Rightarrow continue

□ toutes les fonctions classiques (puissances, exp, ln, sin, cos, sh, ch) sont de classe C^∞ sur leur ensemble de def

Taylor Young : Si f est de classe C^n au voisinage de a , alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

notation pour la dérivée $n^{\text{ième}}$

II les formules

Somme: $(u+v)' = u' + v'$

Produit: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ On suppose donc u et v dérivables en a :

[[On doit calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$

$$\frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h) - \overbrace{u(a+h)v(a)}^{\text{ruse}} + \overbrace{u(a+h)v(a) - u(a)v(a)}^{\text{ruse}}}{h}$$

$$= \underbrace{u(a+h)}_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ u(a)}} \cdot \underbrace{\frac{v(a+h) - v(a)}{h}}_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ v'(a)}} + v(a) \cdot \underbrace{\frac{u(a+h) - u(a)}{h}}_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ u'(a)}} = u(a) \cdot v'(a) + v(a) \cdot u'(a)$$

car u est dérivable,
donc continue

car v
est dérivable
en a

car u est
dérivable en a

]]