

all

36 $f(x) : e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$g(x) = \frac{2+x}{2-x}$$

$2+x$	$2-x$
$-(2-x)$	$1+x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} \dots$
$2x$	
$-(2x-x^2)$	
x^2	
$-(x^2 - \frac{x^3}{2})$	
$\frac{x^3}{2}$	
$-(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4})$	
$\frac{x^4}{4} \dots$	

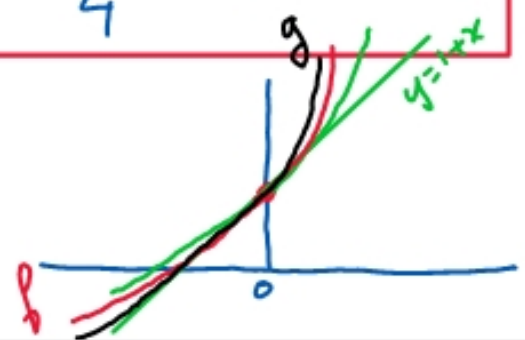
$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)$

$$g(x) - f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= \frac{3-2}{12} x^3 + o(x^3)$$

$$= \frac{1}{12} x^3 + o(x^3)$$

$g > f$ pour $x \approx 0^+$
 $g < f$ pour $x \approx 0^-$



$$p(x) = \frac{12 + 6x + x^2}{12 - 6x + x^2}$$

$$\begin{array}{r} 12 + 6x + x^2 \\ - (12 - 6x + x^2) \\ \hline 12x \\ - (12x - 6x^2 + x^3) \\ \hline 6x^2 - x^3 \\ - (6x^2 - 3x^3) + \dots \\ \hline 2x^3 + \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 - 6x + x^2 \\ \hline 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \end{array} \quad \text{puisque } p(x) \approx e^{2x}$$

pour comparer \ln et e^x , on devrait développer à l'ordre 4

Continuité

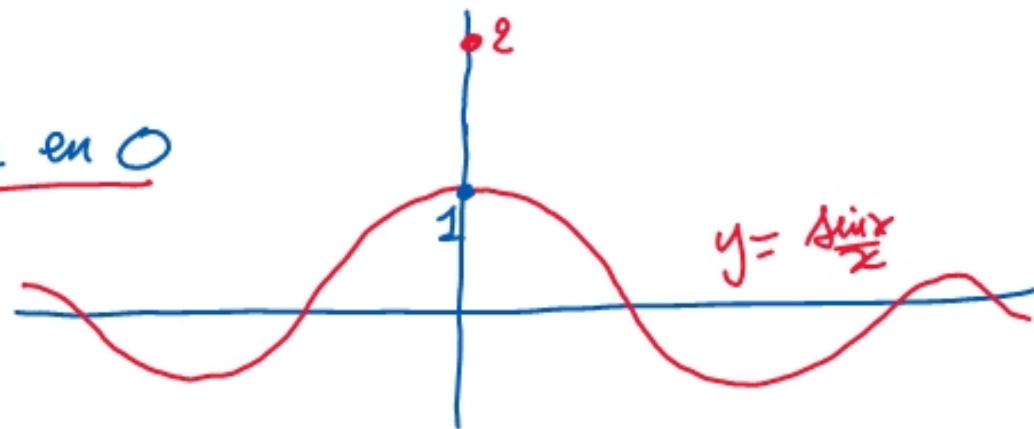
I Continuité en un point

def: f est continue en a lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ex1: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{quand } x \neq 0 \\ 2 & \text{quand } x = 0 \end{cases}$ Continuité en 0?
(autrement dit: $f(0) = 2$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + o(1)) = 1 \neq f(0) = 2$$

donc f n'est pas continue en 0



ex2. $f \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin x}{x} \text{ qd } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 1 \end{cases}$ est-elle continue en 0?

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots \triangleright \dots = 1 = f(0)$, donc f est continue en 0

def. Si f n'est pas définie en a , mais définie autour de a ,
 f est prolongeable par continuité lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et
est finie

ex. $f \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin x}{x} \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots = 1$, donc on
peut prolonger f par continuité en 0.

On pose $f(0) = 1$

def: f est continue à droite en a lorsque

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$$

note aussi

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

↑
notation

def: f est continue à gauche en a lorsque

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$$

note

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

La fonction partie entière: notée E

$E(x)$ est le plus grand entier plus petit, plus que x . ($\leq x$)
ou égal

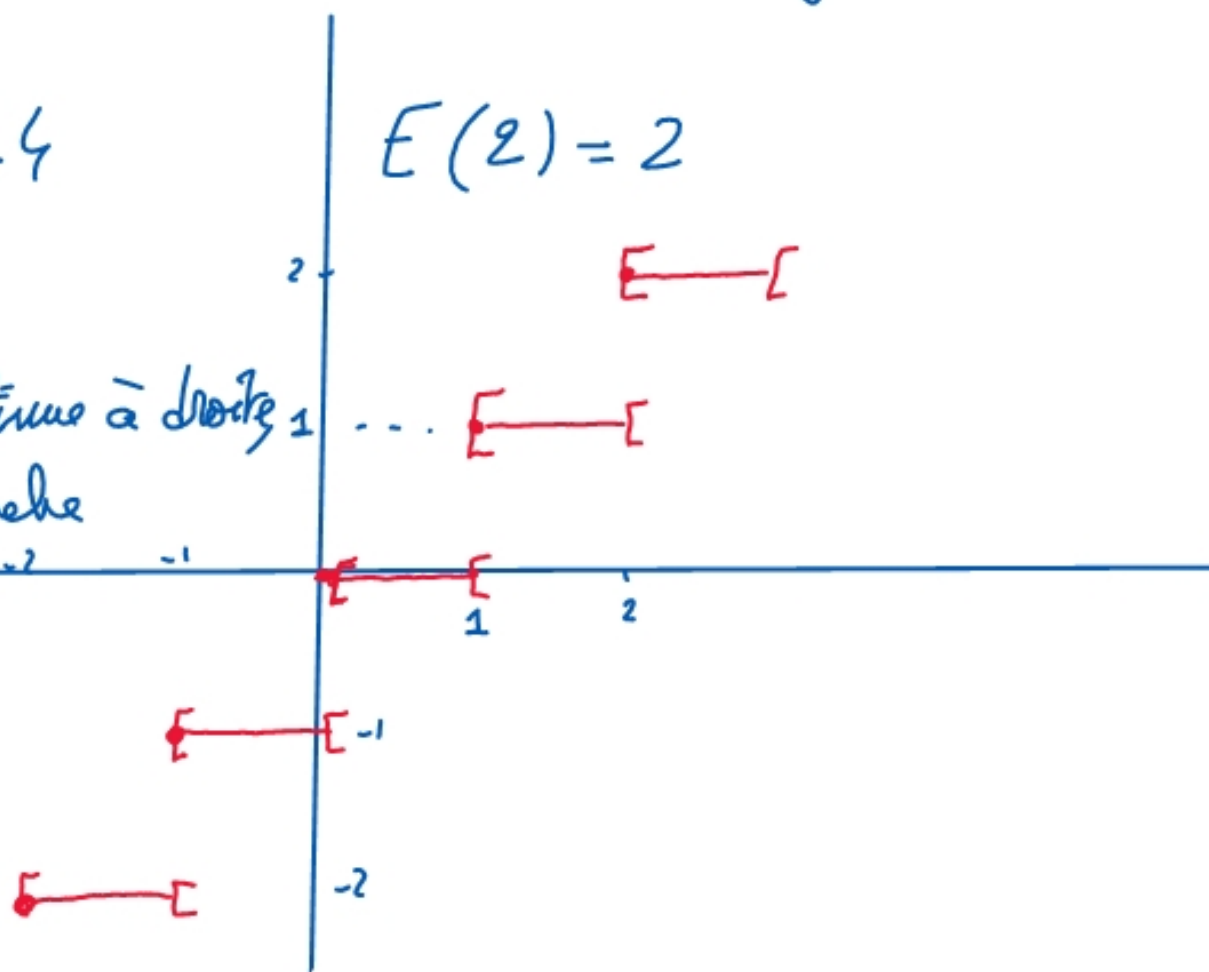
ex $E(2,7) = 2$

$E(-3,1) = -4$

$E(2) = 2$

en $0, 1, 2, \dots$, f est continue à droite
mais pas continue à gauche

Car $\lim_{1^+} f(x) = 1 = f(1)$
et
 $\lim_{1^-} f(x) = 0 \neq f(1)$



[T.] f continue en $a \iff f$ est continue à droite et à gauche en a

$\boxed{T_2}$ les fonctions classiques sont continues là où elles sont définies.

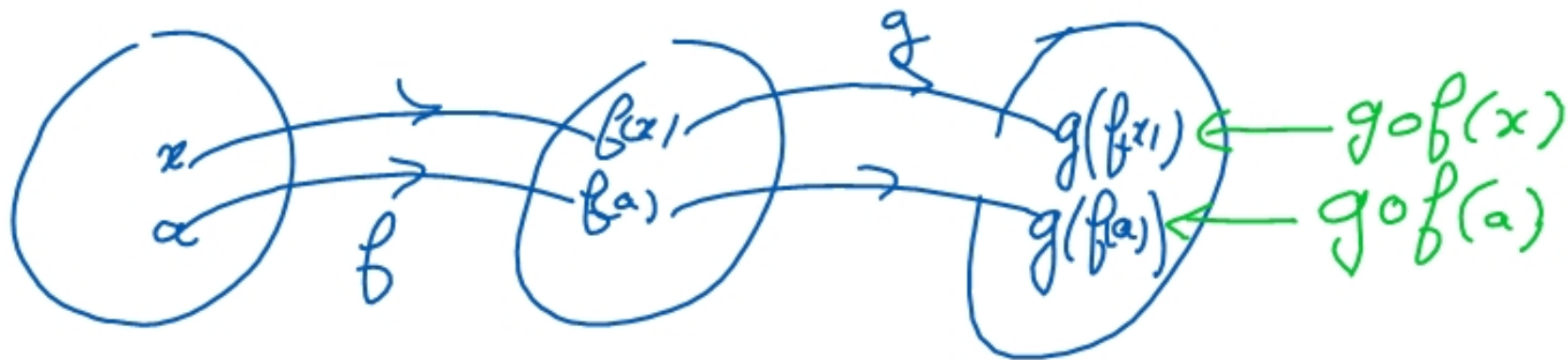
(puissances, Ln, exp, sin, cos, sh, ch, tan)

$\boxed{T_3}$ Sommes, produits et quotients des fonct. ^{ena} continues sont continues en a
(avec $g(a) \neq 0$ pour $\frac{f}{g}$)

$\boxed{T_4}$ Si f est continue en a alors $g \circ f$ est continue en a
| g est continue en $f(a)$

↑ composée

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$



II Continuité sur un intervalle

exemples d'intervalles: $[0, 3]$ $[0, 3[$ $]0, 3[$
 $] -\infty; 3]$ $] -\infty; +\infty[= \mathbb{R}$ $] 2; +\infty[$

on dit que $[0, 3]$; $] -\infty, 3]$ et $] -\infty; +\infty[$ sont fermés

— $] 0, 3[$; $] -\infty, 3[$ et $] -\infty; +\infty[$ sont ouverts

— $[0, 3[$ est fermé à gauche et ouvert à droite

def: Si I est un intervalle de \mathbb{R} , alors

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I lorsque f est continue en a , pour tout $a \in I$

ex: \exp est continue sur \mathbb{R} ; \ln est continue sur \mathbb{R}^{+*}

\sqrt{x} est continue sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$

ex 1: $f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin x}{x} \text{ qd } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 1 \end{cases}$ Montrer que f est continue sur \mathbb{R}

* pour $x \neq 0$, f est continue comme un quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues.

• pour $x = 0$ problème (FV $\frac{0}{0}$) On utilise la def.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \dots = 1 = f(0). \text{ donc } f \text{ est continue en } 0$$

Conclusion f est continue sur \mathbb{R}

2 façons de montrer qu'une application est continue:

(1°) "La phrase magique" c'est "est continue comme somme, produit, ..."

(2°) la définition (là où il y a des problèmes) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ex: $f: \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{1-x} & \text{quand } x \neq 1 \\ -1 & \text{quand } x = 1 \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^{+*}

* quand $x \neq 1$; f est continue comme somme et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions clairement continues.

• quand $x = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0}$ F.I $\text{dét } X = x - 1$
 $\Rightarrow x = 1 + X$

$$f(x) = \frac{\ln(1+X)}{1-(1+X)} = \frac{\ln(1+X)}{-X} = \frac{X + o(X)}{-X} = -1 + o(1) \xrightarrow{X \rightarrow 0} -1 = f(1)$$

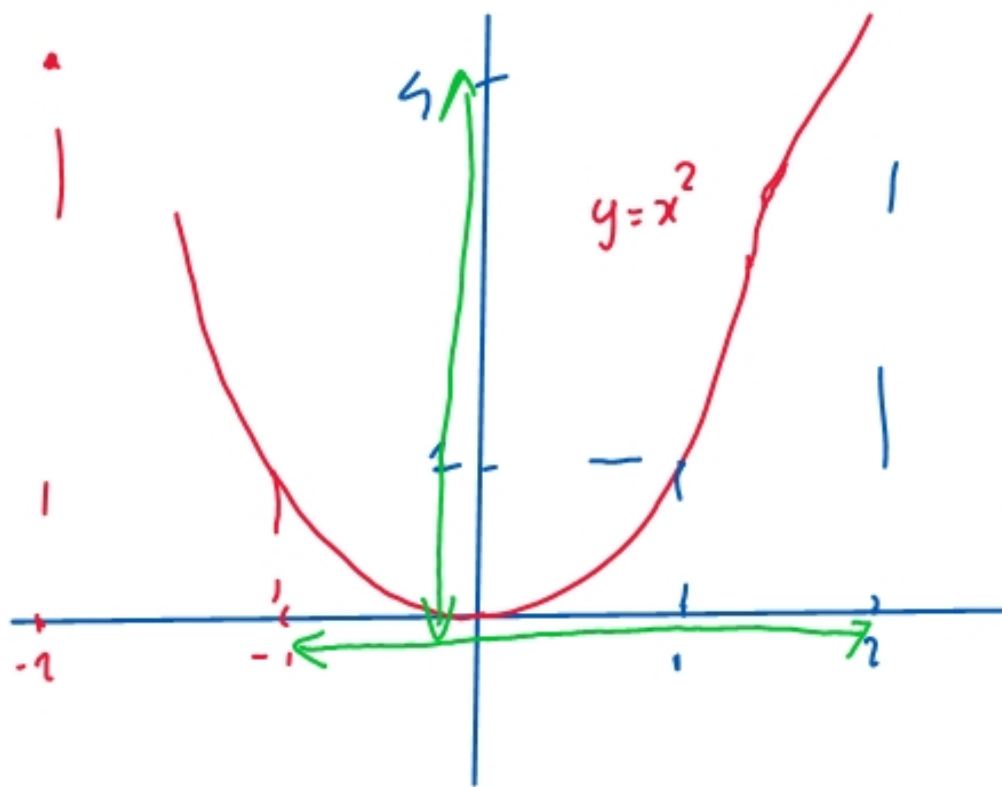
$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, donc f est continue en 1

• conclusion : f est continue sur \mathbb{R}^{+*}

III Théorème des valeurs intermédiaires

T. L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle

exemple avec $f(x) = x^2$.



$$f([0; 2]) = [0; 4]$$

$$f([-1; 1]) = [0; 1]$$

$$f([-1; 2]) = [0; 4]$$

$$f(]-1; 2]) = [0; 4]$$

$$f(]-1; 0]) = [0; 1[$$

$$f(]0; 1]) =]0; 1[$$

$\boxed{T_2}$ L'image d'un intervalle fermé borné par une application continue est un intervalle fermé borné

autrement dit :

$$f([a, b]) = [m, M] \text{ lorsque } f \text{ est } \underline{\text{continue}}$$

application : entre deux zéros d'une application f continue, elle ne change pas de signe

ex :

$$\text{Montrer que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0 \text{ lorsque } f \text{ est continue sur } [0, 1]$$

$$\boxed{\text{T.V.I}} : f([0, 1]) = [m, M] \text{ car } f \text{ est continue}$$

↑ ↑ ↑
Recherches de valeurs extrêmes