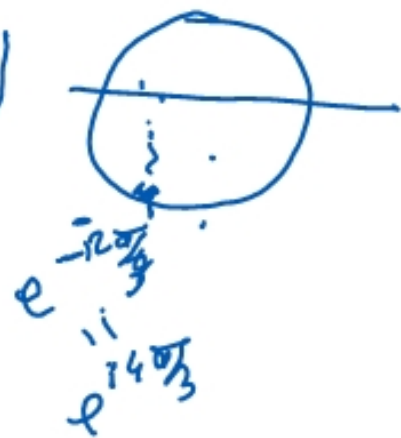


33

$$z = -1 - i\sqrt{3}$$

$$|z| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$z = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



34

$$z = e^{3+i\pi} = e^3 e^{i\pi} = -e^3 \quad \text{can } e^{i\pi} = -1 = e^{-i\pi}$$

$$z_1 = 2e^{i\pi/6} \quad z_2 = 1-i \quad |z_2| = \sqrt{2}$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$



$$z_1 \cdot z_2 = 2e^{i\pi/6} \cdot \sqrt{2} e^{-i\pi/4} = 2\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4})}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{2-3}{12} = -\frac{1}{12}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} e^{-i\pi/12} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{23\pi}{12}}$$

↑
mireup

$$\textcircled{36} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 13$$

(37)

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + 8 \cdot 2 & 1 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(38)

l'inverse de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$ad - bc = 5 - 16 = -11$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(39) \quad 2y' - 3y = 9x^2$$

$$\text{Mét: } \underline{y_H = A e^{\frac{3}{2}x}}$$

$$\text{Sol particulière: } y_p = ax^2 + bx + c \quad y_p' = 2ax + b$$

$$\begin{aligned} 2y_p' - 3y_p &= 4ax + 2b - 3ax^2 - 3bx - 3c \\ &= -3ax^2 + (4a - 3b)x + 2b - 3c \\ &= 9x^2 + 0x + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -3a = 9 & a = -3 \\ 4a - 3b = 0 & 3b = -12 \quad b = -4 \\ 2b - 3c = 0 & 3c = 2b = -8 \quad c = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$y_p = -3x^2 - 4x - \frac{8}{3}$$

Sols d'équation complète:

$$y = A e^{\frac{3}{2}x} - 3x^2 - 4x - \frac{8}{3}$$

$$(4) \quad y'' - 4y = 0$$

$$\lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

2 roots $\lambda = 2$ and $\lambda = -2$

$$y_H = \underline{Ae^{2x} + Be^{-2x}}$$

Geometrie dans \mathbb{R}^3

I. Generalites

Un point a 3 coordonnees $A = (x_A, y_A, z_A)$
 $\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \swarrow$
 l'abscisse l'ordonnee la cote

Coordonnees des vecteurs \vec{AB} : $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA}$
 "Coord de B" moins "coord de A"

Moyenne de 2 pts A et B : $\underline{V} = \frac{A + B}{2}$

Norme d'un vecteur \vec{u} $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$

exemple : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 + 10 + 18 = 32$

I] $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

II] $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

produit vectoriel : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$

u_x v_x
 u_y v_y
 u_z v_z

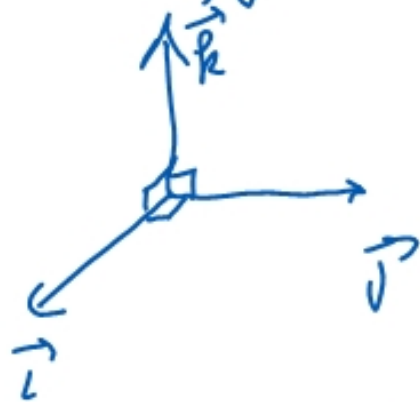
III] $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ et $\perp \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \vec{k}$$

$$\text{ou } \vec{k} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} \quad \leftarrow \text{c'est un vecteur unitaire et } \perp \text{ à } \vec{u} \text{ et } \vec{v}$$

Bases orthonormées : $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est ON (orthonormée)

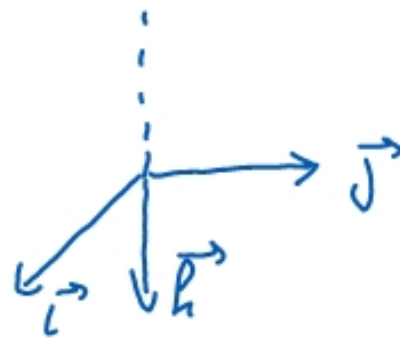
lorsque \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont orthogonaux
 et
 \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont unitaires



Base ON directe

$$\text{càd } \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\text{càd } \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$$



Base ON indirecte

II Equations de plan

1) Equations cartésiennes

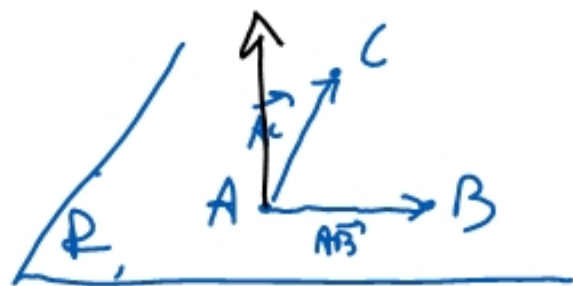
Un plan a pour eq cartésienne $\mathcal{P}: ax + by + cz = d$

II) Un vecteur \perp à ce plan est $\vec{u} = (a, b, c)$

Le plan vectoriel associé à \mathcal{P} a pour eq cartésienne: $\mathcal{P}: ax + by + cz = 0$

ex: trouver l'eq du plan \mathcal{P} passant par $A\left(\frac{1}{3}\right)$, $B\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $C\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$

un vecteur \perp à \mathcal{P} est $\vec{u} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$



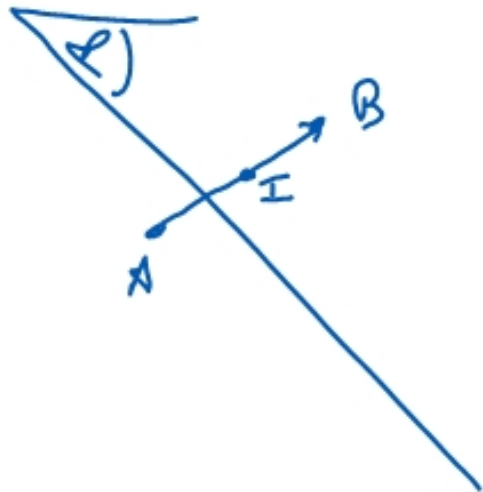
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}: -11x - y + 3z = d$. \mathcal{P} passe par B: $-1 - 3 = d$: $\mathcal{P}: -11x - y + 3z = -4$

ex 2 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Quelle est l'éq cartésienne du plan \perp à la droite (AB) passant par le milieu de $[AB]$



• I milieu de $[AB]$: $I = \frac{A+B}{2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

• Un vecteur \perp à \mathcal{P} est $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\mathcal{P}: -x - y - 4z = d$

\mathcal{P} passe par I , donc $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 4 = d \Rightarrow d = -6$
 $\mathcal{P}: -x - y - 4z = -6$

$\mathcal{P}: x + y + 4z = 6$

(le plan vectoriel associé à \mathcal{P} est: $\vec{\mathcal{P}}: x + y + 4z = 0$)

2.2 Equations paramétriques d'un plan.



$$\begin{cases} x = x_u t + x_v t' + x_A \\ y = y_u t + y_v t' + y_A \\ z = z_u t + z_v t' + z_A \end{cases}$$

où $t, t' \in \mathbb{R}$

ex: Donner les eq paramétriques du plan \mathcal{P} passant par

$$A\left(\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right); B\left(\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}\right) \text{ et } C\left(\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\right)$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{eq param de } \mathcal{P}: \begin{cases} x = -t & +1 \\ y = -t - 3t' & +2 \\ z = -4t - t' & +3 \end{cases} \quad \text{où } t, t' \in \mathbb{R}$$

$\vec{AB} \uparrow \quad \vec{AC} \uparrow \quad A \uparrow$

Si on veut l'eq cartésienne de \mathcal{P} , on élimine t, t'

Si on veut les eq paramétriques de \mathcal{P} , on enlève $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = -t - 3t' \\ z = -4t - t' \end{cases}$$

ex: à partir des eq paramétriques $\begin{cases} x = -t & r1 \\ y = -t - 3t' & r2 \\ z = -4t - t' + 3 & r3 \end{cases}$, retrouver l'eq
cartésienne de \mathcal{L} .

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = -t & +1 \\ y = -t - 3t' & +2 \\ z = -4t - t' + 3 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t & +1 \\ y = -t - 3t' & +2 \\ y - 3z = 11t - 7 & \end{cases} \end{aligned}$$

$\times 3$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11x = -11t & +11 \\ \dots \\ y - 3z = 11t - 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L_1 + L_3 \quad \boxed{11x + y - 3z = 4}$$