

seed

II Multiplication

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 4 \\ \hline 108 \end{array}$$

2

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 41 \\ \hline 27 \\ +108. \\ \hline 1107 \end{array}$$

notation: $u_1 \cdot u_2 \dots \cdot u_n = \prod_{i=1}^n u_i$

ex: Factoriel: $7! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = \prod_{k=2 \text{ ou } 1}^{k=7} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot 7$

$n!$ = $2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-1) \cdot n = \prod_{k=2 \text{ ou } 1}^n k$

se lit : n factoriel ou factoriel n

produit des nombres pairs:

(les pairs sont tous les $2n$ où $n \in \mathbb{N}$)

$$P = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) = ?$$

$$P = \prod_{k=1}^{2n} 2k$$

$$P = \underbrace{1 \cdot 2}_{2} \times \underbrace{2 \cdot 2}_{2 \cdot 2} \times \underbrace{3 \cdot 2}_{3 \cdot 2} \cdot \dots \times \underbrace{n \cdot 2}_{n \cdot 2} = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) \times (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ fois}}) \\ = n! \cdot 2^n$$

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) = 2^n \cdot n!$$

produit des nombres impairs: (les $2m+1$ où $m \in \mathbb{N}$ ou $2m-1$ où $m \in \mathbb{N}^*$)

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m+1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2m)(2m+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2m)}$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m+1) = \frac{(2m+1)!}{2^n \cdot m!} = \prod_{k=0}^m (2k+1)$$

III La division euclidienne

ex
$$\begin{array}{r|l} 28 & 7 \\ 0 & 4 \end{array}$$

$$28 = 4 \cdot 7 + 0$$

Annotations:
- "quotient" points to 4
- "dividende" points to 28
- "diviseur" points to 7
- "reste" points to 0

$$\begin{array}{r|l} 29 & 7 \\ -28 & 4 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$29 = 4 \cdot 7 + 1$$

$$\begin{array}{r|l} 29 & 7 \\ -28 & 4 \\ \hline 10 & \\ -7 & \\ \hline 30 & \\ -28 & \\ \hline 20 & \\ -14 & \\ \hline 60 & \\ -56 & \\ \hline 40 & \\ -35 & \\ \hline 50 & \end{array}$$

$$4,142857142857142857\dots$$

diver Os polinômios :

ex1: divisão de $A = 2X^2 - 6X + 4$ por $X - 1$

$$\begin{array}{r|l} 2X^2 - 6X + 4 & X - 1 \\ - (2X^2 - 2X) & \\ \hline -4X + 4 & \\ - (-4X + 4) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^2 - 6X + 5 & X - 1 \\ - (2X^2 - 2X) & \\ \hline -4X + 5 & \\ - (-4X + 4) & \\ \hline 1 & \\ \text{resto} & \end{array}$$

$$2X^2 - 6X + 4 = (X - 1)(2X - 4) + 0$$

$$\frac{2X^2 - 6X + 4}{X - 1} = 2X - 4$$

$$2X^2 - 6X + 5 = (X - 1)(2X - 4) + 1$$

$$\frac{2X^2 - 6X + 5}{X - 1} = 2X - 4 + \frac{1}{X - 1}$$

IV Réurrence

principe : Si une formule "démarrage" et "se propage", alors elle est vraie pour tout n

cà d : vrai pour un n_0 (souvent 0, 1 ou 2)

Si elle est vraie pour un n ,
alors elle est vraie pour le suivant
cà d $n+1$

ex 1 : Montrons que, $\forall n \geq 1$, $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(Est-ce qd démarrage pour $n=1$?)

$$1 = \frac{1 \times 2}{2} \quad \text{OK}$$

proprement.

① Initialisation: pour $n=1$: $1 = \frac{1 \times 2}{2}$ OK

② Hérédité: Je prends un $n \geq 1$; — toujours pair
Je suppose que $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(Je dois montrer que: $1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$)

On ajoute $n+1$: $1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2 \cdot (n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{Yes}$$

③ Conclusion: D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \geq 1, 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ex 2: $\forall n \geq 1: 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ qd $x \neq 1$

① Initialisation: pour $n=1$: $1 + x = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ oui
 (car $x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$)

② Hérédité: Je prends un $n \geq 1$.

Je suppose que $1 + x + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + x + \dots + x^n + x^{n+1}} &= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^{n+1} \\ &= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + \frac{x^{n+1}(x-1)}{x-1} = \frac{\cancel{x^{n+1} - 1} + (\cancel{x^{n+1}} - \cancel{x^{n+1}})}{x - 1} \\ &= \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1} \quad \text{oui!} \end{aligned}$$

③ Conclusion: D'après le principe de récurrence:

$$\forall n \geq 1 \quad 1 + x + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad (x \neq 1)$$

ex 3: $\forall n \geq 2$, $4^n - 1$ est divisible par 3

Initialisation: pour $n=2$ $4^2 - 1 = 16 - 1 = 15 = 3 \times 5$ Yes

Hérédité: Je prends un $n \geq 2$. Je suppose que $4^n - 1$ est divisible par 3

(Je dois montrer que : $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3)

Il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $4^n - 1 = 3 \cdot k$

On multiplie par 4: $4^{n+1} - 4 = 12k$

on ajoute 3 . $4^{n+1} - 1 = 12k + 3 = 3 [4k + 1]$

donc $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3 ok

Conclusion: D'après le principe de récurrence:

$\forall n \geq 2$, $4^n - 1$ est divisible par 3

ex 4: $\forall n \geq 1$, $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7

Initialisation: Pour $n=1$: $3^4 - 2^2 = 81 - 4 = 77 = 7 \cdot 11$ ok

Hérédité: Je prends un $n \geq 1$ Je suppose que $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7

(Je dois montrer que $3^{2n+4} - 2^{n+2}$ est divisible par 7)

On sait que $3^{2n+2} - 2^{n+1} = 7 \cdot k$ où $k \in \mathbb{N}$

on multiplie par 9 = 3^2

$$3^2(3^{2n+2} - 2^{n+1}) = 63k \Rightarrow 3^{2n+4} - 9 \cdot 2^{n+1} = 63k$$

on ajoute $9 \cdot 2^{n+1}$: $3^{2n+4} = 63k + 9 \cdot 2^{n+1}$

on soustrait 2^{n+2} $3^{2n+4} - 2^{n+2} = 63k + 9 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+2}$

$$= 63k + 2^{n+1}(9 - 2)$$

$$= 7[9k + 2^{n+1}] \text{ Yes}$$

Conclusion: D'après le principe de récurrence: $\forall n \geq 1$, $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7