

*deee*

$$DL \text{ de } \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5)}$$

$$\begin{array}{r} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^5) \\ - (x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + \mathcal{O}(x^5)) \\ \hline \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \mathcal{O}(x^5) \\ - (\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \mathcal{O}(x^5)) \\ \hline \frac{2}{15}x^5 + \mathcal{O}(x^5) \\ - (\frac{2}{15}x^5 + \mathcal{O}(x^5)) \\ \hline \mathcal{O}(x^5) \end{array}$$

$$\frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5)}{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \mathcal{O}(x^5)}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} &= \frac{-1+3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{120} - \frac{1}{24} &= \frac{1-5}{120} \\ &= -\frac{4}{120} = -\frac{2}{60} = -\frac{1}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{30} + \frac{1}{6} &= \frac{-1+5}{30} \\ &= \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \mathcal{O}(x^5)$$

$$\tan(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$$


$\mathcal{O}(x^5)$   
ordre 5:

DL de  $(1+x)^\alpha$  au voisinage de 0

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} x^4 + \mathcal{O}(x^4)$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2!} x^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})}{6} x^3 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \mathcal{O}(x^3)$$


$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x)$$

2.3 Les règles du jeu des  $\mathcal{O}(x)$ .

$$\bullet \mathcal{O}(x^4) = x \mathcal{O}(x^3) = x^3 \mathcal{O}(x) = x^4 \mathcal{O}(1)$$

$$\bullet \underline{\mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}(x^4)} = 2 \mathcal{O}(x^4) = \underline{\mathcal{O}(x^4)}$$

$$\mathcal{O}(x^4) - \mathcal{O}(x^4) = \mathcal{O}(x^4)$$

$$\mathcal{O}(x^4) + x^5 = \mathcal{O}(x^4)$$

$$\mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}(x^5) = \mathcal{O}(x^4)$$

Attention  $\frac{\mathcal{O}(x^2)}{\mathcal{O}(x^3)} = \frac{x^2 a_1}{x^3 a_1} = \frac{\mathcal{O}(1)}{x \mathcal{O}(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{0}{0}$  F. I

on ne peut pas simplifier  $\frac{\mathcal{O}_1(x)}{\mathcal{O}_2(x)}$

Exemple : DL à l'ordre 3 en 0 de  $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)}$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)^2 = x^2 - 2 \cdot \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{36} + \mathcal{O}(x^3) = \underline{x^2 + \mathcal{O}(x^3)}$$

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) \Rightarrow \ln(\cos x) = \left(-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right)^2 \dots$$
$$= \underline{-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)}$$

$$\frac{x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{\mathcal{O}(x^3)} \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3) \\ \hline -2 + \mathcal{O}(x) \end{array} \right. \text{Zut}$$

On n'a pas le DL à l'ordre 3  
on l'a seulement à l'ordre 1

On reprend à l'ordre 5

$$\sin^2 x = \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^5) \right)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{36} + 2 \cdot \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$\ln(\cos x) = \ln \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5) \right) = - \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5) \right) - \frac{\left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \right)^2}{2} - \frac{\left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \right)^3}{3} \dots$$

$$\left( \ln(1-X) = -X - \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} - \frac{X^5}{5} + \mathcal{O}(X^5) \right) \quad \text{où } X = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^4)$$

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5) - \frac{1}{2} \left( \frac{x^4}{4} + \text{part} \right) - \frac{1}{3} (\text{part}) \quad \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = \frac{1-3}{24}$$

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4 + \mathcal{O}(x^5) \quad = \frac{-2}{24} = -\frac{1}{12}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^5) \\
 (x^2 + \frac{x^4}{6} + \mathcal{O}(x^5)) \\
 \hline
 -\frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^5) \\
 -(-\frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^5)) \\
 \hline
 \mathcal{O}(x^5) \\
 -\mathcal{O}(x^5)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^5) \\
 \hline
 -2 + x^2 + \mathcal{O}(x^3)
 \end{array}$$

$$-\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = -\frac{2-1}{6} = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)} = -2 + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

2.4 DLs ailleurs qu'en 0.

exemple: DL à l'ordre 2 en  $x_0 = 1$  de  $f(x) = \frac{\ln(x)}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{0}{0}$  F.I

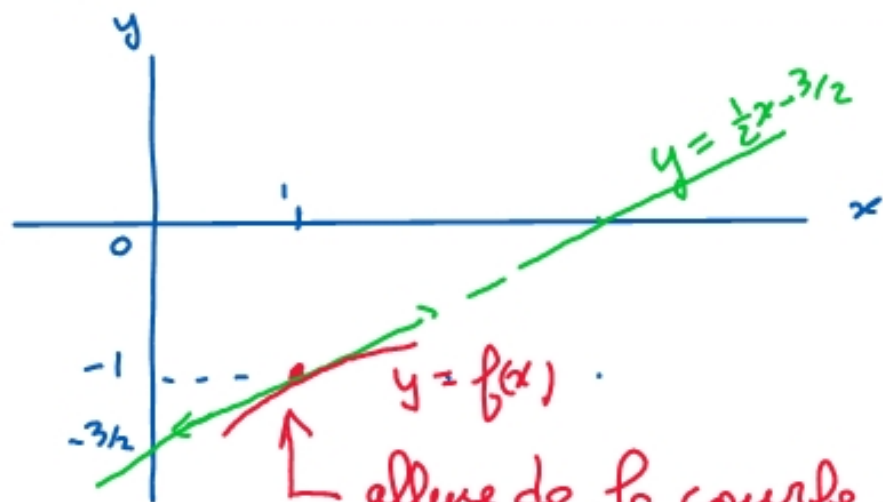
On se ramène en 0 avec le changement de variable.  $X = x - 1$

qd  $x \rightarrow 1$ ,  $X \rightarrow 0$

$$X = x - 1 \Rightarrow x = 1 + X$$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1-x} = \frac{\ln(1+X)}{1-(1+X)} = \frac{X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)}{-X} = -1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{3} + o(X^2)$$

$$f(x) = -1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{3} + o((x-1)^2)$$



eq de la tge en  $x_0 = 1$ :  $y = -1 + \frac{x-1}{2}$

pende  $\frac{1}{2}$

courbe en dessous de la tge car

$$-\frac{(x-1)^2}{3} < 0$$

Cas général: DL en  $x_0 = a$

On fait le chgt de variable  $X = x - a$

Quand  $x \rightarrow a$ ,  $X \rightarrow 0$ . On peut utiliser les DL classiques.

On récupère:  $f(x) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n + \mathcal{O}(X^{n+1})$

et donc  $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \mathcal{O}((x-a)^{n+1})$

tpte:  $y = a_0 + a_1(x-a)$

Le 1<sup>er</sup> terme  $\neq 0$  à partir de  $a_2$   
donne la position de la courbe/tpte.

## 2.5 Formules de Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathcal{O}((x-a)^{n+1})$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathcal{O}(x-a)^{n+1}$$

où  $f^{(n)}(a)$  désigne la dérivée  $n^{\text{ème}}$  de  $f$  en  $a$ .

ex. : avec  $f(x) = e^x$  en  $a = 0$

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \quad f''(0) = 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1}).$$

→ eq de la tpe :

$$y' = f(a) + f'(a)(x-a)$$



## 2.6 développement asymptotique

ex :  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  décrit asymptotiquement en  $+\infty$  à l'ordre 2

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} (1+0)^\infty = ?? \quad \text{F.I}$$

$$f(x) = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \rightarrow e^{\infty \times 0} \quad \text{F.I}$$

On peut faire le DL de  $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  car  $\frac{1}{x} \xrightarrow{+\infty} 0$

$$f(x) = e^{x \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right]} = e^{\underbrace{1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{ne tend pas vers } 0}}$$

$$= e^1 \cdot e^{\underbrace{-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{tend vers } 0 \text{ . DL}}}$$

$$= e \left[ 1 + \left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]$$