



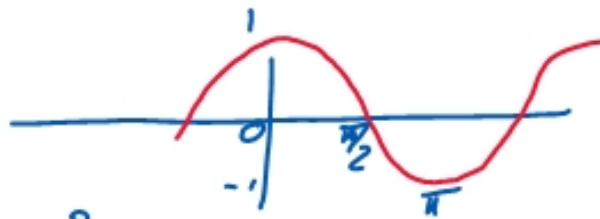
$$1+x+\dots+x^n = \begin{cases} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} & \text{qd } x \neq 1 \\ n+1 & \text{qd } x = 1 \end{cases}$$

① Somme partielle géométrique

② $\binom{7}{2} = ?$ $\frac{7!}{2!5!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 3 \cdot 7 = 21$

③ $\sin(\heartsuit - \text{crown}) = \sin(\heartsuit)\cos(\text{crown}) - \sin(\text{crown})\cos(\heartsuit)$

④ dessin de $\cos x$

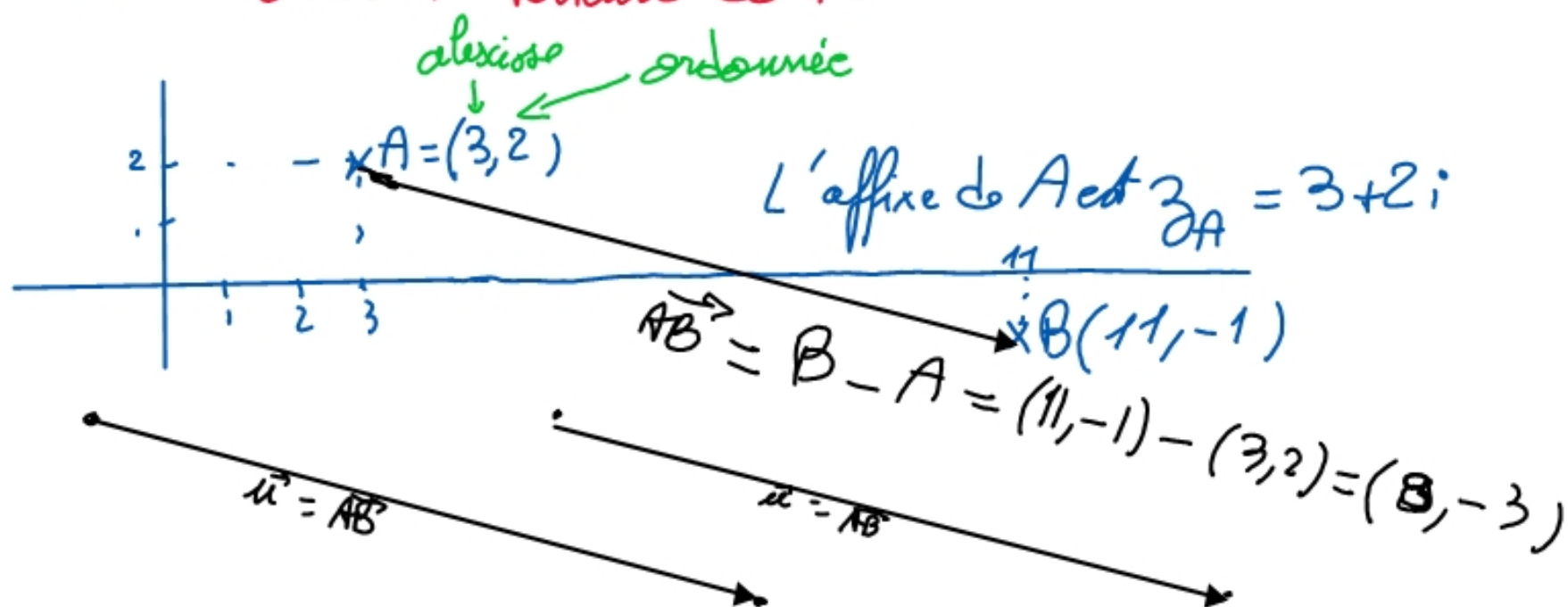


⑤ $\sin(\theta)$ en fonction de $e^{i\theta}$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Géométrie

I Points et Vecteurs de \mathbb{R}^2



Il] les coordonnées du vecteur \vec{AB} sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$

Norme d'un vecteur : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$

c'est aussi le module de l'affixe de \vec{u} : $z_{\vec{u}} = x_{\vec{u}} + i y_{\vec{u}}$

pende d'un vecteur : La pende de \vec{AB} est

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

La pende de \vec{u} est

$$p = \frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}}$$

ex : la pende de $\vec{u}(3,4)$ est $p = \frac{4}{3}$

la pende de $(3,0)$ est $p = 0$

la pende de $(0,4)$ est $p = \infty$

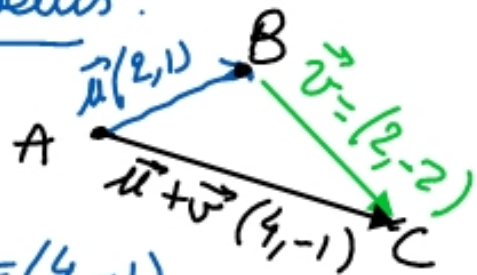
$\vec{e}_1 \rightarrow$ pende nulle

\uparrow pende infinie

pour dessiner une pende 2, on avance de 1, on monte de 2 :



Somme de deux vecteurs :



$$\vec{u} + \vec{v} = (2, 1) + (2, -2) = (4, -1)$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

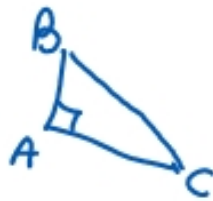
Relation de Chasles

distance entre deux points :

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\|$$

noté AB

Pythagore :



$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

\Leftrightarrow il y a un angle droit en A

Produit scalaire : $\vec{u}(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$ $\vec{v}(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}})$

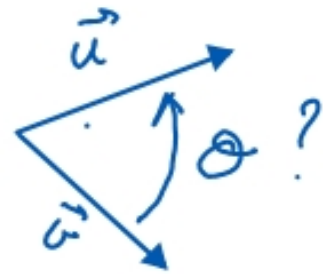
déf $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}} \cdot x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \cdot y_{\vec{v}}$

\square :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

ex: $\vec{u} (3, 1)$ et $\vec{v} (2, -2)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + 1 \times (-2) = 6 - 2 = 4$$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

$$4 = \sqrt{3^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + (-2)^2} \cos \theta = \sqrt{10} \sqrt{8} \cos \theta = \sqrt{80} \cos \theta = \sqrt{16 \cdot 5} \cos \theta$$

$$4 = 4\sqrt{5} \cos \theta \Rightarrow \underline{\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

vecteurs orthogonaux: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (car $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$)

ex: un vecteur orthogonal à $\vec{u} = (3, 1)$ est $\vec{v} = (-1, 3)$

\square un vecteur \perp à $\vec{u} (a, b)$ est $\vec{v} = \pm(-b, a)$

ou
 $\vec{v} = (1, -3)$
ou
 $\vec{w} = (2, -6)$

Vecteur normé ou unitaire : On dit que \vec{u} est unitaire (ou normé)
lorsque $\|\vec{u}\| = 1$

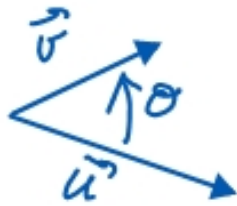
Pour "normer un vecteur", on le divise par sa norme
ex: si $\vec{u} = (3, 1)$, alors $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(3, 1)}{\sqrt{10}}$ est unitaire

déterminant : def: le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est :
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

déterminant de deux vecteurs: $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \det \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \end{pmatrix} = x_{\vec{u}} y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}} y_{\vec{u}}$

$$\left(|\det(\vec{u}, \vec{v})| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \left| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \right| \right)$$

$$\text{ex: } \vec{u} = (3, -1) \quad \vec{v} = (2, 1)$$



$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - (-1) \times 2 = 3 + 2 = 5$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \vec{u} & \vec{v} \end{matrix}$

$$\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\theta) = \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \sin\theta = \sqrt{25 \cdot 2} \sin\theta = 5\sqrt{2} \sin\theta = 5$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

\square 2 vecteurs sont colinéaires \Leftrightarrow leur déterminant est nul

$$\uparrow \\ \vec{u} = k\vec{v} \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

II Equations de droites dans \mathbb{R}^2

Exemple : $y = 2x + 3$ ou $x = 3$



$2y = 4x + 6$



$2x = 6$

verticale

Cas général : Une droite a pour équation $ax + by + c = 0$

équation cartésienne

ex $y = 2x + 3 \Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y + 6 = 0$

$x = 3 \Leftrightarrow x - 3 = 0$

dans $y = ax + b$, la pente de la droite est a
↑
pente

ex1: donner l'eq cartésienne de la droite de pente 2 passant par $A(3, 1)$

$$y = 2x + b$$

$$\underline{y = 2x - 5}$$

en A: $1 = 2 \times 3 + b \Rightarrow b = 1 - 6 = -5$

↑ ↑
 y_A x_A

ex2: donner l'eq cartésienne de la droite de vecteur directeur $\vec{u}(1, 2)$ passant par $A(3, 1)$

pente = $\frac{2}{1} = 2 \Rightarrow y = 2x + b$. Elle passe par A $\Rightarrow b = -5$

①: $\underline{y = 2x - 5}$

ex 3 : donner l'éq cartésienne de la droite passant ^{par} A(3,1) et B(5,-2)

$$\vec{AB} = (5, -2) - (3, 1) = (2, -3) \quad \text{pente de } \vec{AB} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{eq : } y = -\frac{3}{2}x + b$$

$$\text{elle passe par A : } y_A = -\frac{3}{2}x_A + b \Rightarrow 1 = -\frac{3}{2} \cdot 3 + b$$

$$\Rightarrow b = 1 + \frac{9}{2} = \frac{11}{2}$$

$$\underline{y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2y = -3x + 11$$

$$\boxed{3x + 2y - 11 = 0}$$

ou

$$\boxed{3x + 2y = 11}$$

ex4: dessin la droite d'eq $2x - 3y = 1$. (D)

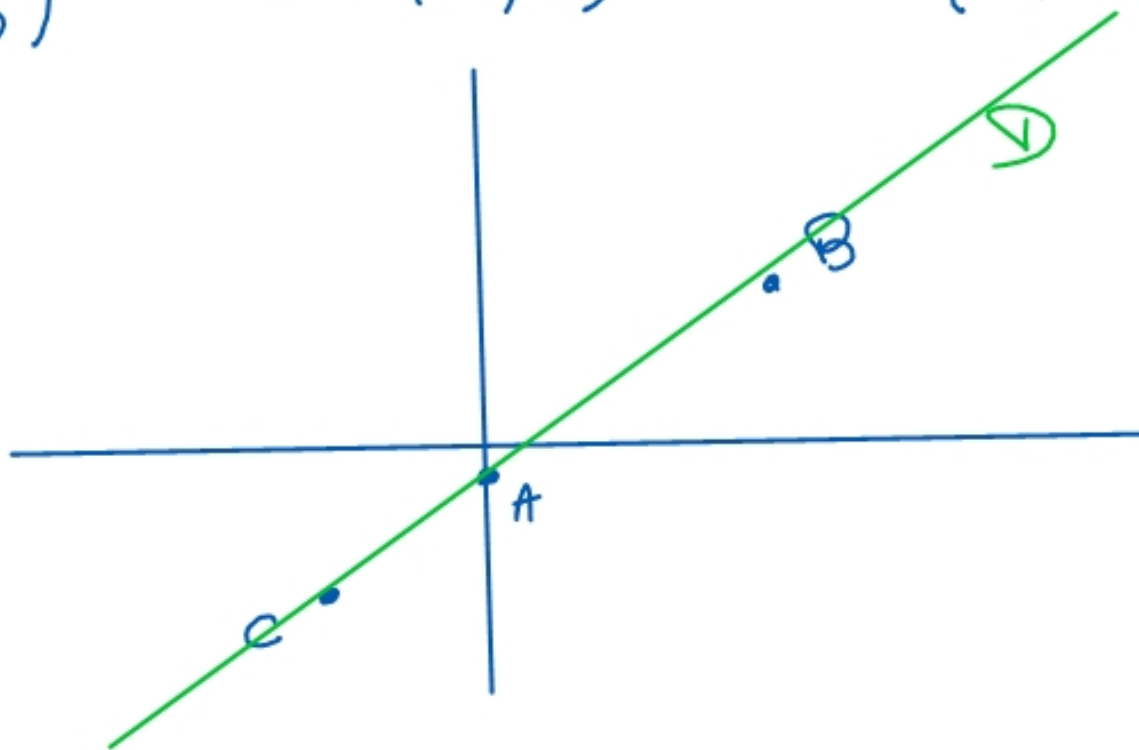
$$\left(\begin{array}{l} \text{pente?} \\ 3y = 2x - 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

↑
pente $\frac{2}{3}$

$$A = \left(0, -\frac{1}{3} \right)$$

$$B = (2, 1)$$

$$C = (-1, -1)$$



rqm : Si 2 points A et B sont sur la droite d'éq $ax+by=c$
alors le vecteur \vec{AB} vérifie : $a x_{\vec{AB}} + b y_{\vec{AB}} = 0$

en effet $\begin{cases} a x_A + b y_A = c \\ a x_B + b y_B = c \end{cases} \Rightarrow L_2 - L_1, a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) = 0$
 $a x_{\vec{AB}} + b y_{\vec{AB}} = 0$

\square Les vecteurs de la droite d'éq $ax+by=c$
sont les vecteurs vérifiant $ax + by = 0$
On l'appelle la droite vectorielle associée

ex: la droite \mathcal{D} $2x - 3y = 1$ a pour direction vectorielle ~~assise~~ :

$$\vec{\mathcal{D}}: 2x - 3y = 0$$

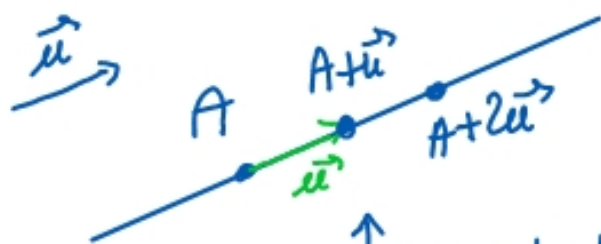
par exemple $\vec{u}(3, 2) \in \vec{\mathcal{D}}$

\vec{u} est un vecteur directeur de \mathcal{D}

avec $B(2, 1)$ et $C(-1, -1)$

$$\vec{CB} = (2, 1) - (-1, -1) = (3, 2)$$

éq paramétriques d'une droite :

$$\begin{cases} x = x_{\vec{u}} t + x_A \\ y = y_{\vec{u}} t + y_A \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$


\vec{u} est un vecteur directeur de \mathcal{D}

↑ quand t varie, on obtient tous les points de la droite \mathcal{D}