

~~18~~

$$\textcircled{18} \quad iz^2 + (-4+3i)z - 5 - i = 0$$

$$\Delta = (-4+3i)^2 - 4i(-5-i)$$

$$= (16 - 24i - 9) + 20i - 4 = 3 - 4i = (a+ib)^2$$

$$|\Delta| \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 + L_2 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \left| \begin{array}{l} 2a^2 = 8 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \\ 2b^2 = 2 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \end{array} \right. = a^2 - b^2 + i 2ab$$

L_2 : a et b ont des signes opposés, donc " $\sqrt{\Delta}$ " = $\pm(2-i)$

2 racines: $z = \frac{4-3i \pm (2-i)}{2i} = \begin{cases} \frac{6-4i}{2i} = \frac{3-2i}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{3i+2}{-1} = (-2-3i) \\ \frac{2-2i}{2i} = \frac{1-i}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i+1}{-1} = -1-i \end{cases}$

$$iz^2 + (-4+3i)z - 5 - i = i(z+2+3i)(z+1+i)$$

• $z^8 = i = e^{i\pi/2}$

les racines 8^{ième} de $e^{i\pi/2}$ sont les $z_k = e^{i\left(\frac{\pi/2}{8} + \frac{2k\pi}{8}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{16} + \frac{2k\pi}{8}\right)}$

où $k=0, 1, \dots, 7$

• $z^7 = 8+8i$ $|8+8i| = \sqrt{8^2+8^2} = \sqrt{2 \cdot 8^2} = 8\sqrt{2}$

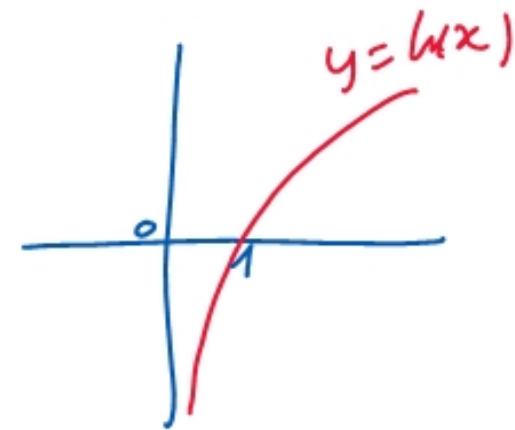
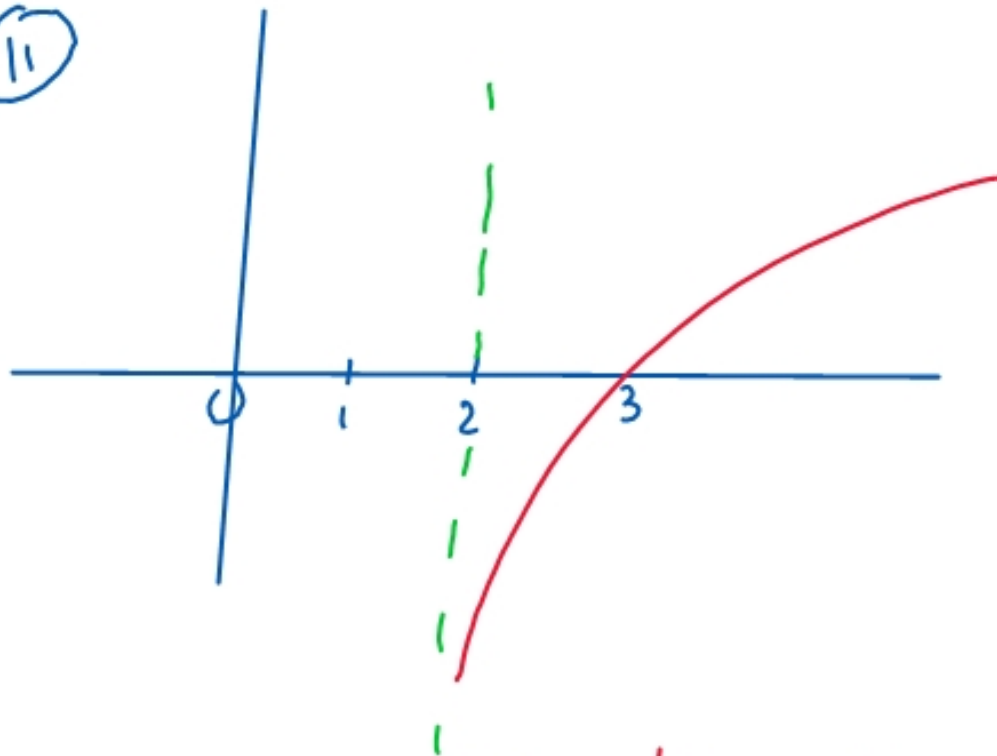
$8+8i = 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8\sqrt{2} e^{i\pi/4}$

les racines 7^{ième} de $8\sqrt{2} e^{i\pi/4}$ sont les $(8\sqrt{2})^{1/7} e^{i\left(\frac{\pi/4}{7} + \frac{2k\pi}{7}\right)} = z_k$

$(8\sqrt{2})^{1/7} = (2^3 \cdot 2^{1/2})^{1/7} = (2^{7/2})^{1/7} = 2^{7/2 \times 1/7} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

$z_k = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{28} + \frac{2k\pi}{7}\right)}$ où $k=0, 1, 2, \dots, 6$

(11)



$g(x) = \ln(x-2)$ ems def: $x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$

[T] La courbe représentative de $g(x) = f(x-a)$ s'obtient en décalant la courbe de f vers la droite de a

(12) Ensemble de déf de $g(x) = \ln(x^2 - 1)$

Il faut que $(x^2 - 1) > 0$
 $g(x)$

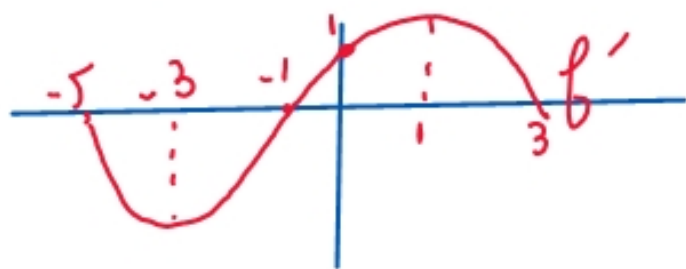
$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x^2	$+$	0	$-$	0	$+$

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

~~$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$~~

(13)



$$f' \leq 0 \text{ sur } [-5, -1]$$

donc

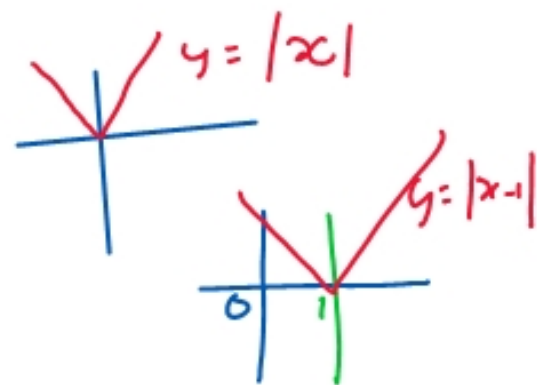
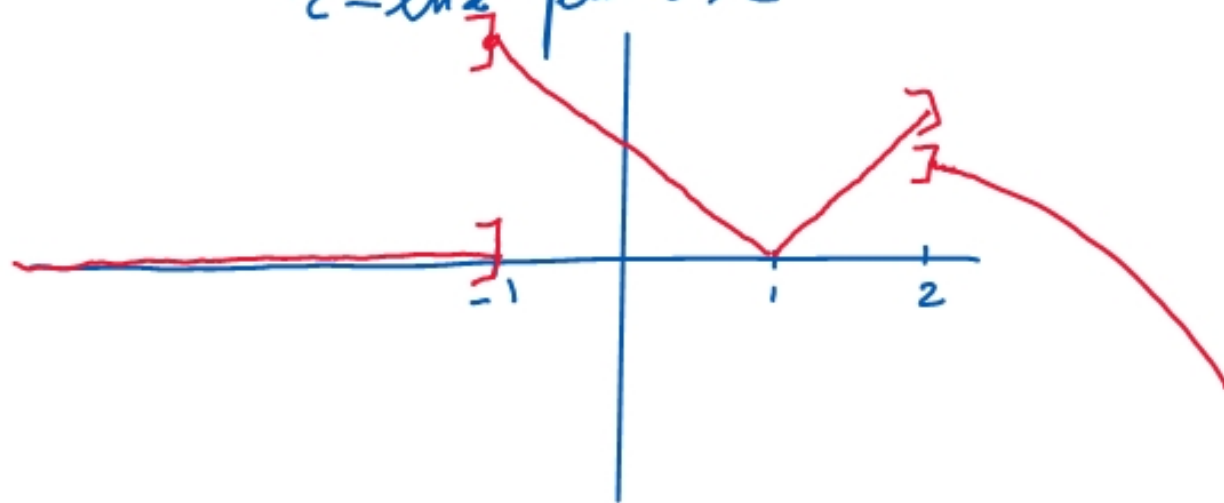
f est décroissante sur $[-5, -1]$

$$(14) \quad f(x) = 2x+1 \quad g(x) = x^2 - 1$$

$$g(f(x)) = g(2x+1) = (2x+1)^2 - 1 = 4x^2 + 4x + 1 - 1 = 4x^2 + 4x$$

↑
note' $g \circ f(x)$

$$(15) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq -1 \\ |x-1| & \text{pour } -1 < x \leq 2 \\ 2 - \ln x & \text{pour } x > 2 \end{cases}$$



$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{(x+3)\ln(x+1)}$$



Pro:

$$\begin{cases} x+2 > 0 & x > -2 \\ x+3 \neq 0 & x \neq -3 \\ x+1 > 0 & x > -1 \\ \ln(x+1) \neq 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

$x > -1$ et $x \neq 0$

(17) $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+2x+1}$

$$\begin{array}{r|l} x^3+2 & x^2+2x+1 \\ - (x^3+2x^2+x) & \\ \hline -2x^2-x+2 & \\ - (-2x^2-4x-2) & \\ \hline 3x+4 & \end{array}$$

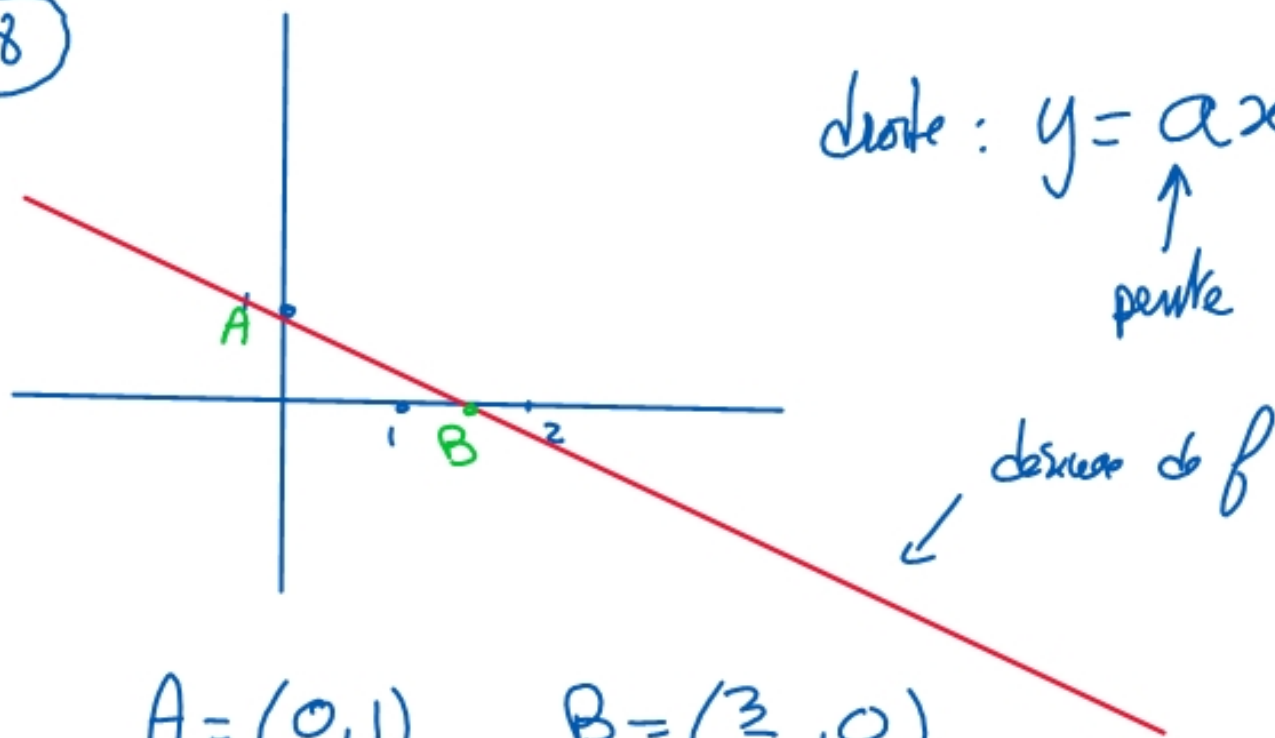
$$x^3+2 = (x^2+2x+1)(x-2) + 3x+4$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-2) + \frac{3x+4}{x^2+2x+1}$$

→ tend vers 0 qd $x \rightarrow +\infty$

droite d'eq $y = x-2$

18



$$A = (0, 1) \quad B = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$\vec{AB} = \left(\frac{3}{2}, 0\right) - (0, 1) = \left(\frac{3}{2}, -1\right)$$

La pente de \vec{AB} est $\frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$

droite (AB) $y = -\frac{2}{3}x + b$. Elle passe A (0, 1) donc

$$1 = -\frac{2}{3} \times 0 + b$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 1$$

$$\underline{f(x) = -\frac{x^2}{3} + x + Cte}$$

$$(19) f \text{ est impair } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

\forall y a une seule racine $/ 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

$$(20) f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{asymptote de } y=0$$

$$\left(\frac{1}{(x-1)(x+2)} \right)' = \left(\frac{1}{x^2+x-2} \right)' = \left((x^2+x-2)^{-1} \right)'$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(x^{-1})' = -1 x^{-2}$$

$$(u^{-1})' = -u^{-2} \cdot u'$$

\downarrow

$$= -(x^2+x-2)^{-2} \cdot (2x+1)$$

$$= \frac{-2x-1}{(x^2+x-2)^2} \quad \text{du signe de } -2x-1$$

II. Développement limités

2.1 définitions

def d'un DL à l'ordre n en x_0 pour la fonction f :

C'est une expression de f de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \underbrace{\theta(x-x_0)^n}_{\text{ou } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\theta(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} = 0}$$

↑ gros ↑ petit ↑ très petit

def: La partie principale du DL est la première terme non nul

variable

encore plus petite

ou
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$

$(x-x_0)^n \varepsilon(x)$

ou

$\theta(x-x_0)^n$

ou
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\theta(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} = 0$

22 DL usuels au voisinage de 0

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

ou
 $x^n \varepsilon(x)$

DL de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ à l'ordre n
en 0

$$\left(\begin{array}{l} \text{ou } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(x^{n+1})}{x^n} = 0 \\ \text{ou } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \end{array} \right)$$

j'appelle ça la formule

rappel: $1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ qd $x \neq 1$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} \cdot x^n$$

en

$$DL_3(0): \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

$$\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$DL_2(0) : \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+O(x^2)$$

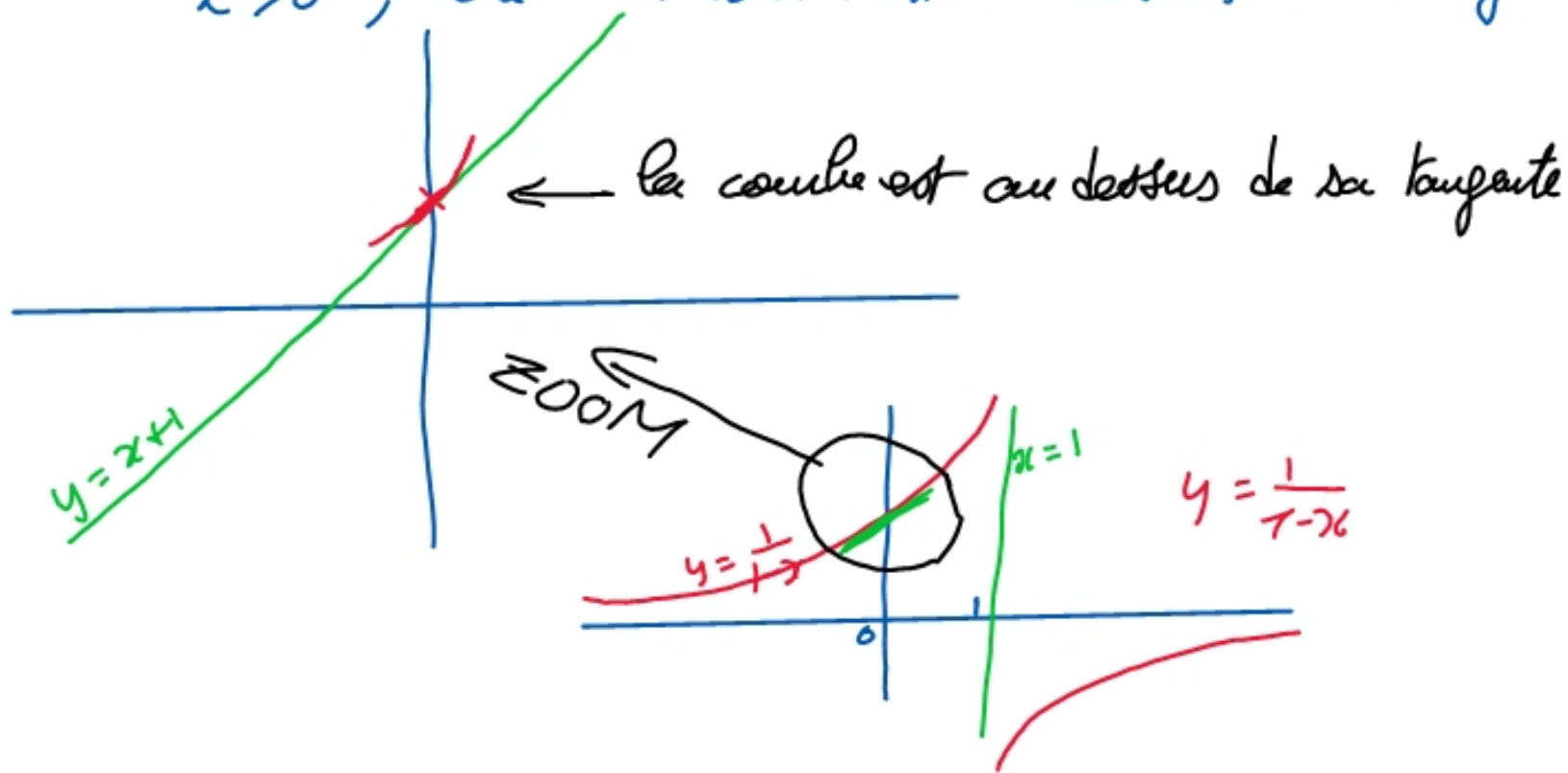
$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f(0) = 1$$

tangente à la courbe : $y = 1+x$

le terme en x^2 donne la position de la courbe par rapport à la tge.

$x^2 > 0$, donc la courbe est au dessus de la tangente.



$$\frac{1}{1-x} = 1+x+\dots+x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

Pour le DL de $\frac{1}{1+x}$, on remplace x par $-x$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\dots + (-1)^n x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$\text{DL}_3(0) : \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1-x} dx &= -\ln(1-x) & \Rightarrow \quad \ln(1-x) &= -\int \frac{1}{1-x} dx \\ & & &= -\int (1+x+x^2+\dots+x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})) dx \end{aligned}$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \dots - \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

tg en 0: $y = x + 1$

Combe au dessus car $\frac{x^2}{2} > 0$

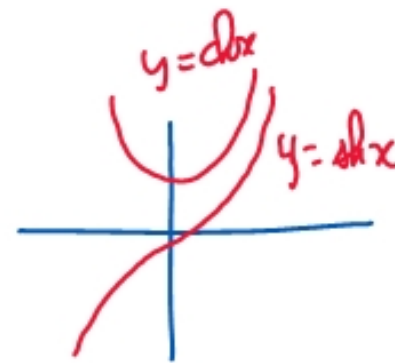
$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$$

ex: DL de $\operatorname{sh} x$ à l'ordre 3 en 0: $\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)$

DL de $\operatorname{sh} x$ à l'ordre 5 en 0: $\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^5)$

DL de $\operatorname{sh} x$ à l'ordre 4 en 0: $\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)$