

### III Equa diff pourries

$$ax^2y'' + bx^2y' + cxy = dx,$$

Soit les coefficients  $a, b, c$  ne sont pas constants

Soit le second membre n'est pas simple

Si on connaît une solution  $y_0$  de l'éq homogène  $ax^2y'' + bx^2y' + cxy = 0$   
alors,  $Ay_0$  est encore une solution. On pose  $y(x) = A(x)y_0(x)$

(on fait varier le cote  $A$ )

les  $A$  disparaissent. Il ne reste que  $A'$  et  $A''$ . On pose  $z = A'$

On récupère une équation diff d'ordre 1. On peut faire

$$\text{ex: } x^2y'' + 3xy' - 3y = 5x^2$$

remarque:  $y_0 = x$  est solution, donc tous les  $A \cdot x$  sont solutions.

On pose  $y(x) = A(x) \cdot x$  (on peut varier la constante  $A$ )

$$y'(x) = A'(x)x + A(x) \quad y''(x) = A''(x)x + A'(x) + A'(x) = A''(x)x + 2A'(x)$$

$$\begin{aligned} x^2 y'' + 3x y' - 3y &= x^2 (A''(x)x + 2A'(x)) + 3x (A'(x)x + A(x)) - 3A(x)x \\ &= A''(x)x^3 + 5x^2 A'(x) + 3x A(x) - 3A(x)x = 5x^2 \end{aligned}$$

L'équation initiale devient  $A''(x)x^3 + 5x^2 A'(x) = 5x^2$

$$\Leftrightarrow x A''(x) + 5 A'(x) = 5$$

On pose  $z = A'$

$$\Leftrightarrow x z'(x) + 5 z(x) = 5 \quad (\alpha)$$

( $\alpha$ ) • HOM :  $x z' + 5z = 0$   $z_{\text{H}} = B e^{-\int \frac{5}{x} dx} = B e^{-5 \int \frac{1}{x} dx}$

$$z_{\text{H}} = B e^{-5 \ln(x)} = B e^{\ln(x^{-5})} = B x^{-5} = \frac{B}{x^5} \quad z_{\text{H}} = \frac{B}{x^5}$$

• Sol particulière : On voit que  $z_p = 1$  convient

• Soles de l'éq complète :  $z = \frac{B}{x^5} + 1$  où  $B \in \mathbb{R}$

$$z = A' \Rightarrow A(x) = \int \left( \frac{B}{x^5} + 1 \right) dx = B \int \frac{1}{x^5} dx + \int 1 dx$$

$$A(x) = B \int x^{-5} dx + x \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$= B \frac{x^{-4}}{-4} + x + C$$

$$y = A(x) \cdot x \Rightarrow y(x) = B \frac{x^{-4}}{-4} \cdot x + x^2 + Cx$$

$$y(x) = D x^{-3} + x^2 + Cx$$

$$y(x) = Cx + \frac{D}{x^3} + x^2 \text{ où } C \text{ et } D \in \mathbb{R}$$

Résolu : Intégration par parties

$$\text{ex 1 : } I = \int 4x^2 \sin(2x) dx \quad \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad u' = 2x \\ v' = \sin(2x) \quad v = \frac{-\cos(2x)}{2} \end{array} \right.$$

$$I = 4 \left( \left[ x^2 \cdot \frac{-\cos(2x)}{2} \right] - \int 2x \cdot \frac{-\cos(2x)}{2} dx \right)$$

$$I = -2x^2 \cos(2x) + 4 \int x \cos(2x) dx \quad \text{IIP}$$

$$I = -2x^2 \cos(2x) + 4 \left( \left[ x \frac{\sin(2x)}{2} \right] - \int \frac{\sin(2x)}{2} dx \right)$$

$$= -2x^2 \cos(2x) + 2x \sin(2x) - 2 \int \sin(2x) dx$$

$$= \underline{-2x^2 \cos(2x) + 2x \sin(2x) + \cos(2x) + C}$$

$$\left. \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = \cos(2x); v = \frac{\sin(2x)}{2} \end{array} \right|$$

$$\text{ex 2: } I = \int 3x e^{-x} dx = 3 \int x e^{-x} dx$$

$$\text{I 88} \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array} \right.$$

$$\left( \begin{array}{ll} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = e^{-x} & v' = -e^{-x} \end{array} \right)$$

$$I = 3 \left( [-x e^{-x}] - \int 1 \cdot (-e^{-x}) dx \right)$$

$$= -3x e^{-x} + 3 \int e^{-x} dx = \underline{-3x e^{-x} - 3e^{-x} + C}$$

$$\text{ex 3: } J = \int x \ln x dx$$

$$\text{I 88} \left| \begin{array}{ll} u = \ln(x) & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right.$$

$$J = \left[ \frac{x^2}{2} \ln(x) \right] - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x}{2} dx = \underline{\frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C}$$



ex 4:  $\int \frac{2x^2}{x^2+1} dx = I = \int \frac{2x^2+2-2}{x^2+1} dx$  1ceppel:  
arctan'x =  $\frac{1}{x^2+1}$

$$= 2 \int 1 - 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= 2x - 2 \arctan x + C$$

$$\left( J = \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) \quad L = \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{x^2+1} \right)$$

$$K = \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int x \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx$$

IPP:

$$\begin{cases} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2+1)^2} & v = -\frac{1}{x^2+1} \end{cases}$$

$$K = -\frac{x}{x^2+1} - \int -\frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= -\frac{x}{x^2+1} + \arctan x + C$$

## III Racine carrée d'un complexe

deux méthodes : (1°) avec la forme trigo

II] les racines carrées de  $z = Re^{i\theta}$  sont  $\pm \sqrt{R} e^{i\frac{\theta}{2}}$

en effet  $(\sqrt{R} e^{i\frac{\theta}{2}})^2 = R e^{i\frac{\theta}{2} \times 2} = R e^{i\theta}$

(rappel :  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$  (formule de Moivre)  
 $(a^b)^c = a^{b \times c}$   $(e^{i\frac{\theta}{2}})^2 = e^{i\theta}$ )

(2°) avec la forme algébrique  $z = A + iB$

On cherche  $a + ib$  tel que  $(a + ib)^2 = A + iB$   
 $a^2 - b^2 + i2ab = A + iB \Rightarrow \begin{cases} A = a^2 - b^2 \\ B = 2ab \end{cases}$

ex: trouver les racines carrées de  $z = 3 - 4i$

$$3 - 4i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow 3 - 4i = a^2 - b^2 + i2ab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{2}{b} \quad (\text{Ligne 2})$$

$$\Rightarrow \text{Ligne 1: } \left(-\frac{2}{b}\right)^2 - b^2 = 3 \Leftrightarrow \frac{4}{b^2} - b^2 = 3 \Leftrightarrow 4 - b^4 = 3b^2$$

$$\Leftrightarrow b^4 + 3b^2 - 4 = 0 \quad \dots \quad \text{Zet}$$

Ruse: On calcule le module de  $z = 3 - 4i = (a + ib)^2$

$$|z| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = \underline{a^2 + b^2}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 + L_3 : 2a^2 = 8 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \underline{a = \pm 2} \\ L_3 - L_1 : 2b^2 = 2 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow \underline{b = \pm 1} \end{array}$$

Ruse:  $|z| \rightarrow a^2 + b^2 = 5$

Ligne 2: on voit que  $a$  et  $b$  ont  ~~$2+i$~~  en signe opposé  ~~$-2-i$~~   $\pm(2-i)$



ex 2 : Racines carrées de  $z = \sqrt{3} + i$  avec les 2 méthodes :

1° avec la forme trigo :  $|z| = \sqrt{3+1} = 2$



$$z = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2 e^{i\pi/6}$$

les racines carrées de  $z$  sont  $\pm \sqrt{2} e^{i\pi/12} = \pm \left( \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} + i \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} \right)$

2° avec la forme algébrique  $\sqrt{3} + i = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i 2ab$

$$\text{module de } z \begin{cases} a^2 - b^2 = \sqrt{3} \\ 2ab = 1 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$$

$$L_1 + L_3 : 2a^2 = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow a^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$$

$$L_3 - L_1 : 2b^2 = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow b = \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$$

avec la ligne 2, on voit que  $a$  et  $b$  ont le même signe, donc

$$\text{les sols sont } \pm \left( \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} + i \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} \right)$$

$$\sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{12} \right)$$