

## Equations Différentielles d'ordre 2

I Equation Homogène  $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0$

On résout (ou on intègre) lorsque  $a, b$  et  $c$  sont des constantes.

def: Le polynôme caractéristique associé à l'équa diff  $ay'' + by' + cy = 0$

est  $P(x) = ax^2 + bx + c$

1<sup>er</sup> cas:  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ . Il y a deux racines  $\lambda$  et  $\mu$

Sols:  $y_{\text{H}}^{(2)} = Ae^{\lambda x} + Be^{\mu x}$  où  $A$  et  $B$  sont dans  $\mathbb{R}$

2<sup>es</sup> cas:  $\Delta = 0$ . Il y a une racine double  $\lambda$

Sols  $y_{\text{H}}^{(2)} = (Ax + B)e^{\lambda x}$  où  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

3<sup>es</sup> cas:  $\Delta < 0$ . Il n'y a pas de racines dans  $\mathbb{R}$ , mais il y en a dans  $\mathbb{C}$

-  $\Delta > 0$  les deux racines des  $\mathbb{C}$  sont  $-\frac{b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$   $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{-\Delta}$

les deux racines sont de la forme  $\alpha \pm i\omega$

Solutions:  $y_H(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$  où  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

amortissement

pulsation

ex1.  $y'' - 3y' + 2y = 0$

$P(x) = x^2 - 3x + 2$      $\Delta = 9 - 8 = 1$     2 racines  $\frac{3 \pm 1}{2} \in \mathbb{Z}$

$y_H = A e^{2x} + B e^x$  où  $A$  et  $B \in \mathbb{R}$

ex 2:  $y'' + 4y' + 4y = 0$

$P(x) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$  Une racine double  $-2$

sols:  $y_H(x) = (Ax + B)e^{-2x}$  où  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

ex 3:  $y'' - 2y' + 2y = 0$

$P(x) = x^2 - 2x + 2$   $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$   
( $\sqrt{\Delta} = 2i$ )

les deux racines sont:  $\frac{2 \pm 2i}{2} \leftarrow \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$   
 $1 \pm 1i$

sols:  $y_H = e^{1x} (A \cos(1x) + B \sin(1x))$  où  $A, B \in \mathbb{R}$

$y_H = e^x (A \cos x + B \sin x)$

⌈ L'ensemble des solutions  $E$  de l'équa diff  $ay'' + by' + cy = 0$  est stable pour l'addition

caid si  $f$  et  $g$  sont dans  $E$ , alors  $f+g \in E$

⌈ Je prends deux solutions  $f$  et  $g$  de l'équa diff  $ay'' + by' + cy = 0$ .  
(  $af'' + bf' + cf = 0$  et  $ag'' + bg' + cg = 0$  )

$$\underline{a(f+g)'' + b(f+g)' + c(f+g) = a(f''+g'') + b(f'+g') + c(f+g)}$$

$$= af'' + ag'' + bf' + bg' + cf + cg$$

$$= (af'' + bf' + cf) + (ag'' + bg' + cg)$$

$$= 0 + 0 = \underline{0}$$

car  $f$  est sol

car  $g$  est sol

donc  $f+g$  est solution

$E$  est stable pour + ⌋



II Solution particulière lorsque les coefficients  $a, b, c$  sont constants  
et lorsque le second membre est simple

Si le second membre est.

- Un polynôme
- $\alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$
- polynôme  $\times e^{\lambda x}$

alors une sol particulière est:

- Un polynôme de même degré
- $\gamma \cos(\omega x) + \delta \sin(\omega x)$
- (polynôme de  $n^{\text{e}}$  degré)  $\times e^{\lambda x}$

et si ça ne marche pas, on multiplie par  $x$   
voire par  $x^2$

ex 1:  $y'' + 2y' + 2y = x + 1$

HOM  $y'' + 2y' + 2y = 0$   $P(x) = X^2 + 2X + 2$   $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$

2 racines:  $\frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$  Sol  $y_H = e^{-x} (A \cos(x) + B \sin(x))$

Sol particulière:  $y_p = ax + b$   $y_p' = a$   $y_p'' = 0$

$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = x + 1 \Leftrightarrow 0 + 2a + 2(ax + b) = x + 1$   
 $\Leftrightarrow 2ax + (2a + 2b) = x + 1$

$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$   
 $2b = 1 - 1 = 0 \Rightarrow b = 0$   $y_p = \frac{1}{2}x$

Sols de l'éq complète:  $y = e^{-x} (A \cos(x) + B \sin(x)) + \frac{1}{2}x$

où  $A$  et  $B \in \mathbb{R}$

ex2:  $y'' - 2y' = x + 1$

HOM:  $y'' - 2y' = 0$   $P(x) = X^2 - 2X = X(X-2)$  racines 0 et 2

sols.  $y_H = Ae^{0x} + Be^{2x}$   $y_H = A + Be^{2x}$  ou  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Sol particulière:  $y_p = ax + b$   $y_p' = a$   $y_p'' = 0$

$y_p'' - 2y_p' = -2a = x + 1$

cte      fonction de  $x$       !!! ? Impossible

On  $\times$  par  $x$   $y_p = ax^2 + bx$   $y_p' = 2ax + b$   $y_p'' = 2a$

$y_p'' - 2y_p' = 2a - 2(2ax + b) = -4ax + 2a - 2b = x + 1$

$\begin{cases} -4a = 1 \\ 2a - 2b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1/4 \\ 2b = 2a - 1 = -1/2 - 1 = -3/2 \end{cases} \quad b = -3/4$

$y_p = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x$

Sols de l'éq complète:  $y = A + Be^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x$

$$\text{ex 3: } y'' + y' + y = 13 \cos(2x)$$

$$\text{HOM: } y'' + y' + y = 0 \quad P(x) = x^2 + x + 1 \quad \Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$$

$$2 \text{ racines: } \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_H = e^{-\frac{1}{2}x} \left( A \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right)$$

$$\text{Sol particulière: } y_p = a \cos(2x) + b \sin(2x)$$

$$y'_p = -2a \sin(2x) + 2b \cos(2x) \quad y''_p = -4a \cos(2x) - 4b \sin(2x)$$

$$y''_p + y'_p + y_p = (-4a \cos(2x) - 4b \sin(2x)) + (-2a \sin(2x) + 2b \cos(2x)) + (a \cos(2x) + b \sin(2x))$$

$$= [-3a + 2b] \cos(2x) + [-3b - 2a] \sin(2x)$$

$$= 13 \cos(2x) + 0 \sin(2x)$$

$$\begin{cases} -3a + 2b = 13 \\ -2a - 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \times 3 \\ \times 2 \end{matrix} \begin{cases} -9a + 6b = 39 \\ -4a - 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \begin{cases} -13a = 39 \\ -4a - 6b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -3 \quad \text{et} \quad 6b = -4a = 12 \quad b = 2$$

$$y_p = -3 \cos(2x) + 2 \sin(2x)$$



Sols de l'eq complète :

$$y = e^{-1/2x} \left( A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) - 3 \cos(2x) + 2 \sin(2x)$$

ex 4:  $y'' + y = \cos(x)$

HOM:  $y'' + y = 0$        $P(x) = X^2 + 1$        $\Delta = -4 = (2i)^2$   
2 racines.       $\frac{0 \pm 2i}{2} = \pm i$        $y_H = e^{0x} (A \cos(x) + B \sin(x))$

$$y_H = A \cos(x) + B \sin(x) \text{ où } A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

Sol particulière:  $y_p = a \cos(x) + b \sin(x)$        $y_p' = -a \sin(x) + b \cos(x)$

$$y_p'' = -a \cos(x) - b \sin(x)$$

$$y_p'' + y_p = -a \cos(x) - b \sin(x) + a \cos(x) + b \sin(x) = 0 = \cos(x) \quad ???$$

IMPOSSIBLE

en fait  $y_p = x(a \cos(x) + b \sin(x))$