



$$p_0 = y_0 \quad q_0 = 1 \quad p_1 = y_0 y_1 + 1 \quad q_1 = y_1$$

$$p_n = p_{n-1} y_n + p_{n-2} \quad q_n = q_{n-1} y_n + q_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

(16) Montrer par récurrence que $\forall n \geq 2 \quad p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1} = (-1)^n$

Initialisation: pour $n=2$ $p_1 q_0 - p_0 q_1 = (y_0 y_1 + 1) \cdot 1 - y_0 y_1 = 1 = (-1)^2$
 OK

Hérédité: Je prends un $n \geq 2$. Je suppose que $p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1} = (-1)^n$

(On doit montrer que $\underbrace{p_n}_{\downarrow} q_{n-1} - p_{n-1} \underbrace{q_n}_{\downarrow} = (-1)^{n+1}$)

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (p_{n-1} y_n + p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1} (q_{n-1} y_n + q_{n-2}) \\ &= \cancel{p_{n-1} y_n q_{n-1}} + p_{n-2} q_{n-1} - \cancel{p_{n-1} q_{n-1} y_n} - p_{n-1} q_{n-2} \\ &= - (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = - (-1)^n = (-1)^{n+1} \quad \text{FIN} \end{aligned}$$

$$x = \sqrt{2022} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2022} - E(\sqrt{2022})} \quad E(\sqrt{2022}) = 44$$

$$x_1 = f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2022} - 44} \times \frac{\sqrt{2022} + 44}{\sqrt{2022} + 44} = \frac{\sqrt{2022} + 44}{2022 - 44^2} = \frac{\sqrt{2022} + 44}{86}$$

II. Équa Diff lin éaire

2.1. Eq homogène

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

□ Les solutions de $ay' + by = 0$ sont les $y(x) = Ae^{-\int \frac{b}{a} dx}$ où $A \in \mathbb{R}$

ex 1: $3y' + 2y = 0$ sols: $y_H = Ae^{-\int \frac{2}{3} dx} = Ae^{-\frac{2}{3}x}$

□ Si a et b sont constants, alors les sols de l'équa diff $ay' + by = 0$ sont les fonctions $y = Ae^{-\frac{b}{a}x}$ où $A \in \mathbb{R}$

ex 2 $xy' + y = 0$ Sols: $y_H = Ae^{-\int \frac{1}{x} dx} = Ae^{-\ln x}$

rappel $a \ln(b) = \ln(b^a)$

$$y_H = Ae^{\ln(x^{-1})} = Ax^{-1}$$

$$y_H = \frac{A}{x} \text{ où } A \in \mathbb{R}$$

III L'ensemble des solutions de l'équation homogène $ay' + by = 0$ est stable pour l'addition

cà d si f et g sont 2 solutions de HOM, alors $f+g$ est aussi solution

équation homogène

IV Soit f et g 2 sols de l'éq $ay' + by = 0$
 $a f' + b f = 0$ et $a g' + b g = 0$

$$\underline{a(f+g)' + b(f+g)} = a(f' + g') + b(f + g) = a f' + a g' + b f + b g$$
$$= (a f' + b f) + (a g' + b g)$$

$$= \underset{\uparrow}{0} + \underset{\uparrow}{0} = \underline{0}$$

cà f est sol

cà g est sol

Donc $f+g$ est solution II

2.2 Equation avec second membre : $ax_1y'(x) + bx_1y_2 = c(x)$

Méthode de variation de la constante :

Sols de Hom : $y_H = A e^{-\int \frac{b}{a} dx}$ où $A \in \mathbb{R}$

On cherche une solution particulière en remplaçant la constante A par la fonction $A(x)$

ex1 : $x y' + y = \ln(x)$ sur \mathbb{R}^{+*}

Hom : $y_H = \frac{A}{x}$ où $A \in \mathbb{R}$ (fait en 2.1 ex 2)

Sol part:ulier : M.V.C. $y_P = \frac{A(x)}{x}$ $y_P' = \frac{A'(x) \cdot x - A(x)}{x^2}$

méthode const cste

$$x y_P' + y_P = x \frac{A'(x) \cdot x - A(x)}{x^2} + \frac{A(x)}{x} = A'(x) - \frac{A(x)}{x} + \frac{A(x)}{x} = \ln(x)$$

$A'(x) = \ln(x)$

$$A'(x) = \ln(x) \Rightarrow A(x) = \int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx \quad \text{I 22} \left. \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v = 1 \quad v' = x \end{array} \right\}$$

$$A(x) = [x \ln(x)] - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln x - x$$

$$\Rightarrow y_{\text{p}}(x) = \frac{x \ln(x) - x}{x} = \frac{x(\ln(x) - 1)}{x} \quad \boxed{y_{\text{p}} = \ln(x) - 1}$$

Solutions de l'équation complète: $y = y_H + y_p$

$$\boxed{y = \frac{A}{x} + \ln(x) - 1} \quad \text{où } A \in \mathbb{R}$$

$\exists!$ y a une solution unique si on donne une condition initiale

ex: on cherche la sol telle que $f(1) = 37$

$$f(1) = 37 = \frac{A}{1} + \ln(1) - 1 = A - 1 \Rightarrow A = 38$$

$$f(x) = \frac{38}{x} + \ln(x) - 1$$

Cas où les a et b sont constants et où le second membre est simple

Pour trouver la sol particulière y_p , pas besoin de MNC, on cherche une sol particulière de la m forme que le second membre

ex1 $y' - 2y = x + 3$ HOM $y = A e^{2x}$ où $A \in \mathbb{R}$

Sol part: $y_p = \alpha x + \beta$ (le second membre est un polynôme de degré 1)

$$y_p' = \alpha$$

$$y_p' - 2y_p = \alpha - 2(\alpha x + \beta)$$

$$= -2\alpha x + \alpha - 2\beta = x + 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\alpha = 1 \\ \alpha - 2\beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ 2\beta = \alpha - 3 = -\frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2} \Rightarrow \beta = -\frac{7}{4} \end{cases} \quad \underline{y_p = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{4}}$$

Sols de l'éq complète: $y = A e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$ où $A \in \mathbb{R}$

$$\text{ex 2} \quad y' + y = 2 \cos(3x) - \sin(3x)$$

$$\text{Hom: } \underline{y = A e^{-x}} \quad \text{où } A \in \mathbb{R}$$

$$\text{Sol part. } y_p = \alpha \cos(3x) + \beta \sin(3x)$$

$$y_p' = -3\alpha \sin(3x) + 3\beta \cos(3x)$$

$$y_p' + y_p = (\alpha + 3\beta) \cos(3x) + (\beta - 3\alpha) \sin(3x) = 2 \cos(3x) - \sin(3x)$$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 2 \\ \beta - 3\alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \times 3 \quad \begin{cases} 3\alpha + 9\beta = 6 \\ \beta - 3\alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow L_1 + L_2 \quad \begin{cases} 10\beta = 5 \\ \beta - 3\alpha = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{2} \\ 3\alpha = \beta + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{2} \\ 3\alpha = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad y_p = \underline{\frac{1}{2} \cos(3x) + \frac{1}{2} \sin(3x)}$$

$$\text{Sols de l'eq complète: } \boxed{y = A e^{-x} + \frac{1}{2} \cos(3x) + \frac{1}{2} \sin(3x)} \quad \text{où } A \in \mathbb{R}$$

ex3: $y' - 2y = (x+3)e^x$ et $y' - 2y = (x+3)e^{2x}$

HOM: $y_H = Ae^{2x}$ où $A \in \mathbb{R}$

Sol particulière:

$$y_p = (ax+b)e^x$$

Ici, le e^x du second membre
est \neq de e^{2x} de HOM

pas de problème

$$y_p = \overset{\downarrow}{x}(ax+b)e^{2x} \\ = (ax^2+bx)e^{2x}$$

Ici, il y a e^{2x} dans le
second membre et dans l'eq HOM

PROBLÈME,

on multiplie par x

On peut aussi utiliser la M.V.C