

# INTRO AUX MATHS

## ± L'Addition

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{p=0}^n u_p = \sum_{k=0}^n u_k \quad \left| \begin{array}{l} \text{variables muettes} \\ \text{le resultat} \\ \text{depend de } n \end{array} \right.$$

ex:  $u_7 + u_8 + \dots + u_{21} = \sum_{p=7}^{21} u_p$

$$\sum_{i=p}^q (u_i + v_i) = \sum_{i=p}^q u_i + \sum_{i=p}^q v_i$$

⚠  ~~$\sum_{i=p}^q u_i \cdot v_i = \left( \sum_{i=p}^q u_i \right) \left( \sum_{i=p}^q v_i \right)$~~

$$ac + bd \neq (a+b) \cdot (c+d)$$

$$\sum_{k=p}^q a \cdot u_k$$

$$= a \left( \sum_{k=p}^q u_k \right)$$

ex:  $2a + 2b = 2(a + b)$

$$0u_p + a u_{p+1} + a u_{p+2} + \dots + a u_q$$

$$a(u_p + u_{p+1} + \dots + u_q)$$

$$\sum_{i=1}^n 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ termes}} = n$$

$$\sum_{i=3}^7 1 = \overset{i=3}{\downarrow} 1 + \overset{i=4}{\downarrow} 1 + \overset{i=5}{\downarrow} 1 + 1 + \overset{i=7}{\downarrow} 1 = 5$$

Nombre de termes de p à q:

$$\sum_{i=p}^q 1 = q - p + 1$$

ici  $p < q$

$$1) \quad \sum_{i=1}^n i = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

↑  
somme partielle d'une suite arithmétique

$$2) \quad \sum_{k=p}^q k = \frac{(p+q)(q-p+1)}{2}$$

↳ le nombre de termes

↳ le premier + le dernier

ex calculer  $\sum_{k=3}^{37} k = \frac{40 \cdot 35}{2} = 20 \cdot 35 = 700 = S$

Si j'ai oublié la formule n°2.

$$S = \sum_{k=1}^{37} k - \sum_{k=1}^2 k = \frac{37 \cdot 38}{2} - 3 = 37 \cdot 19 - 3 = \dots = 700$$

Somme partielle géométrique:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \begin{cases} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{lorsque } x \neq 1 \\ n+1 & \text{lorsque } x = 1 \end{cases}$$

ou encore

$$1 + x + \dots + x^n = \begin{cases} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} & \text{qd } x \neq 1 \\ n+1 & \text{qd } x = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n x^k = x^0 + x^1 + \dots + x^n} = \begin{cases} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

ex:  $2^7 + 2^8 + \dots + 2^{15} = ?$   $S$

On connaît  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$

1<sup>ère</sup> méthode:  $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{15} - (1 + 2 + \dots + 2^6)$

2<sup>ème</sup> méthode:  $S = 2^7 [1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^8]$   
 $= 2^7 \cdot \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 2^7 \cdot (2^9 - 1)$   
 $= \underline{2^{16} - 2^7}$

Changement d'indexation ou décalage d'indice

$$\sum_{k=p}^{k=q} u_k = \sum_{i=p}^q u_i = \sum_{i=p+1}^{q+1} u_{i-1} = u_p + u_{p+1} + \dots + u_q$$

$$\sum_{k=p}^q u_k = \sum_{k=p+1}^{q+1} u_{k-1} = \sum_{k=p+2}^{q+2} u_{k-2} \left. \vphantom{\sum_{k=p}^q} \right) u_p + u_{p+1} + \dots + u_q$$

$$= \sum_{k=p-1}^{q-1} u_{k+1} = \sum_{k=p-2}^{q-2} u_{k+2}$$

ex: Calcul de  $S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

truc :  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$S = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$$

$$S = \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$S = 1$$

(telescoping)

$$- \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

avec le décalage d'indice :

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \left( \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \right)$$

décalage :  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k-1} \right)$

$$\left( \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right) - \left( \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \right)$$

Somme double :

exemple calcul de  $S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 1$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left( \underbrace{\sum_{j=i}^n 1}_{\text{nombre de termes}} \right) = \sum_{i=1}^n (n-i+1)$$

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n (n-i+1) = \sum_{i=1}^n n - \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \\ &= n \sum_{i=1}^n 1 - \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \\ &= n \cdot n - \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{2n^2 - (n^2+n) + 2n}{2} = \frac{n^2+n}{2} \end{aligned}$$