

Concours Blanc Semestre 2

Exercice 1 (ATS 2019) Matrices et Endomorphismes

On se place dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 muni de sa base orthonormée canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On note $\text{id} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire identité. On se donne l'application linéaire $s : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ vérifiant

$$\begin{cases} s(e_1) = e_3 \\ s(e_2) = e_4 \\ s(e_3) = e_1 \\ s(e_4) = e_2 \end{cases}$$

et l'application linéaire p définie par $p = \frac{1}{2}(\text{id} - s)$. L'objectif de cet exercice est de diagonaliser les applications linéaires s et p .

- L'objectif de cette question est d'étudier s .
 - Donner la matrice S de s dans la base \mathcal{B} .
 - Montrer que S est diagonalisable (cette question n'exige aucun calcul).
 - Calculer S^2 . Que peut-on en déduire sur s ?
 - Calculer le polynôme caractéristique de S .
 - Montrer que S admet deux valeurs propres, que l'on notera λ_1 et λ_2 , et que l'on choisira telles que $\lambda_1 < \lambda_2$. Quels sont les ordres de multiplicité de λ_1 et λ_2 ?
 - On note E_1 le sous-espace propre de l'endomorphisme s associé à la valeur propre λ_1 . Donner une base (u_1, u_2) de E_1 , telle que les coordonnées des vecteurs u_1 et u_2 soient égales à 0, 1 ou -1 .
 - On note E_2 le sous-espace propre de l'endomorphisme s associé à la valeur propre λ_2 . Donner une base (u_3, u_4) de E_2 , telle que les coordonnées des vecteurs u_3 et u_4 soient égales à 0 ou 1.
 - Trouver une matrice D_1 diagonale et une matrice inversible Q_1 telles que $S = Q_1 D_1 Q_1^{-1}$. On ne demande pas de calculer Q_1^{-1} .
- L'objectif de cette question est d'étudier p .
 - Donner la matrice P de p dans la base \mathcal{B} .
 - Calculer $p \circ p$. Que peut-on en déduire sur p ?
 - Calculer $p(u_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
 - Montrer que l'application linéaire p est diagonalisable.
 - Trouver une matrice D_2 diagonale et une matrice inversible Q_2 telles que $P = Q_2 D_2 Q_2^{-1}$. On ne demande pas de calculer Q_2^{-1} .
- On considère maintenant l'application linéaire $f = 3s + 4p$.
 - Donner la matrice F de f dans la base \mathcal{B} .
 - En faisant le moins de calcul possible, trouver à l'aide des résultats précédents une matrice D_3 diagonale et une matrice inversible Q_3 telles que $F = Q_3 D_3 Q_3^{-1}$. On ne demande pas de calculer Q_3^{-1} .

Paramétriser

Exercice 2 (ATS 2009)

On note (\mathcal{H}) l'hyperbole d'équation cartésienne $y = \frac{1}{x}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

On souhaite déterminer les coordonnées (a, b) du centre Ω du cercle (C) qui passe par O et qui est tangent en un point $M\left(t, \frac{1}{t}\right)$, $t \in \mathbb{R}^*$, à (\mathcal{H}) .

Dire que le cercle (C) est tangent au point M à l'hyperbole (\mathcal{H}) , c'est dire que $M \in (C) \cap (\mathcal{H})$ et que la normale (\mathcal{N}) à (\mathcal{H}) au point M contient le centre Ω du cercle (C) .

1.a. Donner les composantes d'un vecteur \vec{T} tangent à (\mathcal{H}) au point $M\left(t, \frac{1}{t}\right)$.

1.b. En déduire une équation cartésienne de la normale (\mathcal{N}) à (\mathcal{H}) au point $M\left(t, \frac{1}{t}\right)$.

1.c. Écrire que le point $\Omega(a, b)$ appartient à (\mathcal{N}) et en déduire qu'une relation (1) liant a, b et t est :

$$(1) : at^3 - bt = t^4 - 1$$

2. Écrire que $O\Omega^2 = M\Omega^2$ et en déduire qu'une relation (2) liant a, b et t est :

$$(2) : at^3 + bt = \frac{1}{2}(t^4 + 1)$$

3. Déduire des relations (1) et (2) une représentation paramétrique des centres Ω quand t varie.

4. On souhaite étudier la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est :

$$x(t) = \frac{3t^4 - 1}{4t^3} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{-t^4 + 3}{4t} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}^*$$

4.a. Montrer que la courbe (Γ) admet une symétrie de centre O .

4.b. Calculer $x\left(\frac{1}{t}\right)$ et $y\left(\frac{1}{t}\right)$. En déduire une nouvelle symétrie pour la courbe (Γ) .

4.c. Expliquer pourquoi on peut se contenter d'étudier les variations de $x(t), y(t)$ quand le paramètre t appartient à l'intervalle $]0, 1]$

5. Donner le tableau des variations conjointes de $x(t), y(t)$ pour $t \in]0, 1]$. Donner les coordonnées du point $A = (x(1), y(1))$, en déduire celles de $B = (x(-1), y(-1))$.

6. Voici (fig.2) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les graphes de (\mathcal{H}) en pointillé et de (Γ) en gras, et les première et deuxième bissectrices.

Les deux branches de (Γ) sont divisées par la première bissectrice en 4 parties $(\Gamma_1), (\Gamma_2)$ limitées par A , $(\Gamma_3), (\Gamma_4)$ limitées par B .

a) Préciser, en le justifiant, la partie de (Γ) obtenue quand $t \in]0, 1]$.

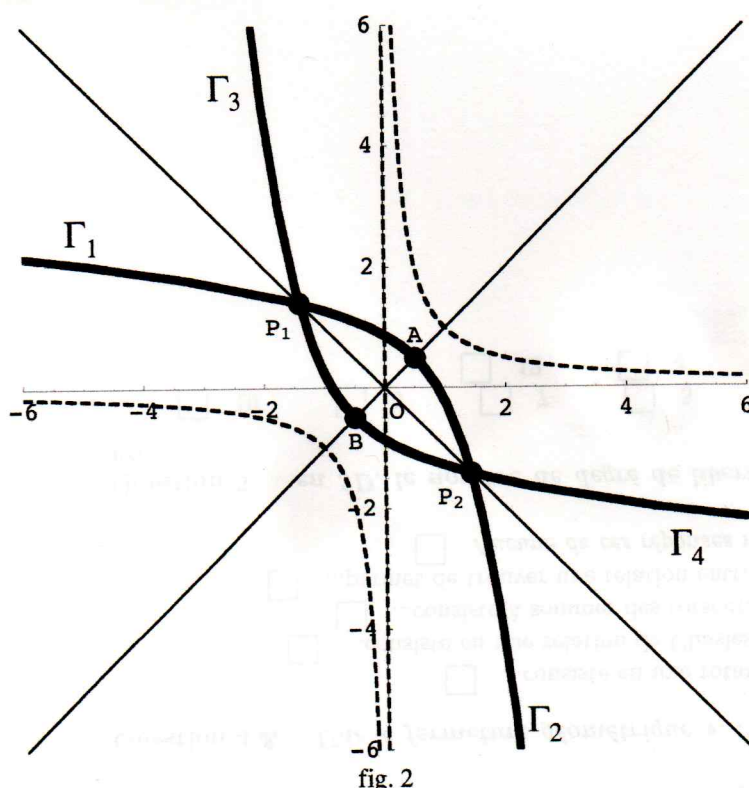


fig. 2

b) Déterminer les paramètres t_1 et t_2 des points doubles P_1, P_2 , (utiliser le fait qu'ils sont invariants si on change t en $-\frac{1}{t}$). On ramènera leur recherche à la résolution de l'équation

$T^3 - 3T^2 - 3T + 1 = 0$, de racine évidente -1 , et on justifiera qu'il n'y a que deux points doubles, et que $t_2 = \frac{1}{t_1}$.

c) Déterminer les coordonnées de P_1 (on pourra calculer d'abord $y(t_1)$ puis $y(t_1)^2$ pour trouver une simplification)

FOURIER

Exercice 3 (ATS 2008)

On pose pour tout couple d'entiers naturels (n, p) : $I_p(n) = \int_0^\pi x^p \cos(2nx) dx$

1. Calculer $I_p(0)$. Montrer que pour $n > 0$, $I_0(n) = 0$, $I_1(n) = 0$, $I_2(n) = \frac{\pi}{2n^2}$.

f est une fonction π -périodique telle que : $\forall x \in [0, \pi[$, $f(x) = \alpha x^2 + \beta x$

On fait l'hypothèse qu'il existe deux réels α, β tels que le développement en série de

Fourier de f est : $S_f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2nx) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx)$

2.a) Déterminer les conditions sur α, β telles que $a_0 = \frac{\pi^2}{6}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{-1}{n^2}$.

b) Déterminer les valeurs de α, β qui répondent à ces conditions.

On suppose désormais que $\alpha = -1$ et $\beta = \pi$

c) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$.

d) Soit $x \in]-\pi, 0[$, on a donc $-x \in]0, \pi[$ et aussi $\pi + x \in]0, \pi[$. Montrer pour les valeurs de α et β trouvées à la question 2.a. $f(-x) = f(\pi + x)$.

e) En déduire que la fonction f est paire et continue sur \mathbb{R} .

3. Que peut-on en déduire pour les coefficients b_n .

4. Montrer que pour tout x de \mathbb{R} $f(x) = S_f(x)$, en énonçant le théorème qui le justifie.

5. Déduire du résultat précédent la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

6. Déduire d'un des résultats précédents la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et de $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

7. Appliquer le théorème de Parseval et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.