

Contrôle 8

Questions de cours :

Donner les développements en séries entières de e^x ; $\cos(x)$; $\sin(x)$; $\frac{1}{1 \pm x}$; $\ln(1 \pm x)$

Penser aux rayons !

Petits exos :

Exo 1. On souhaite étudier l'arc paramétré suivant :
$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$$

Vérifier que les fonctions x et y sont 2π -périodiques.

Trouver la symétrie due aux parités de x et y .

Donner les coordonnées du point $M(\pi - t)$

Expliquer comment on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Étudier l'arc.

(Pour le problème en $\frac{\pi}{2}$, on pourra faire un changement de variable pour se ramener en 0)

Exo 2. Résoudre l'équation différentielle $2xy'' + y' - y = 0$ grâce aux séries entières.

Exo 3. Donner la nature des séries de terme général

$$u_n = \frac{2^n + n^3}{3^n + n} \quad v_n = \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}} \quad w_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} \quad (a > 0)$$

Problème 1

Décomposition de Dunford

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n et O_n respectivement la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **nilpotente** lorsqu'il existe un entier p tel que $A^p = O_n$

1. Exemples : Montrer que $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes.

Montrer que $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

Indication : On pourra élever ces matrices au carré.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe Δ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

- (i) $A = \Delta + N$
- (ii) Δ est diagonalisable
- (iii) N est nilpotente
- (iv) $\Delta N = N \Delta$ (autrement dit : les matrices N et Δ commutent)

alors on dira que le couple (Δ, N) est une **décomposition de Dunford** de A .

2. Montrer que $\Delta_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ forment une décomposition de Dunford de

la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. Montrer que $\Delta_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une décomposition de Dunford de

la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. Soit A_3 une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que A_3 admet une décomposition de Dunford que l'on donnera.

5. De même, soit A_4 une matrice nilpotente de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Montrer que A_4 admet une décomposition de Dunford que l'on donnera.

6. Vérifier que si (Δ, N) est une décomposition de Dunford de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors Δ et N commutent avec A .

Etude d'un exemple

7. Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Δ est-elle inversible ?

Trouver les valeurs propres de Δ et diagonalisez Δ sous la forme $P^{-1}\Delta P = D$

avec $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1} puis Δ^i pour $i \geq 1$.

8. On pose $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que N est nilpotente.

Vérifier que $N\Delta = \Delta N = 2N$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

Montrer que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A .

9. Décomposition de Dunford des puissances de A

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour la puissance 0 d'une matrice, on rappelle la convention $M^0 = I$

Montrer que $\forall i \geq 1, N\Delta^i = 2^i N$. (on pourra faire une petite récurrence)

A l'aide de la décomposition (Δ, N) de Dunford de A , montrer que : $A^p = \Delta^p + p2^{p-1}N$

Montrer que $(\Delta^p, p2^{p-1}N)$ est une décomposition de Dunford de A^p .

En déduire que $A^p = 2^{p-1} \begin{pmatrix} 2+p & -p & p \\ 1+p-2^p & 1-p+2^p & p-1+2^p \\ 1-2^p & -1+2^p & 1+2^p \end{pmatrix}$

10. Décomposition de Dunford d'une racine carrée

Si $R^2 = A$, on dit que la matrice R est une racine carrée de la matrice A .

Déterminer les matrices $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonales vérifiant $U^2 = D$

A l'aide de P et P^{-1} , déterminer alors une matrice S à valeurs propres positives telle que $S^2 = \Delta$.

Déterminer deux réels a et b tels que $S = a\Delta + bI_3$ en raisonnant sur les formes diagonalisées.

En déduire que S et $N_3 = \Delta^{-1}N$ commutent

Grâce à la question 8, vérifier que $\Delta^{-1}N = N\Delta^{-1}$

On pose $M = I_3 + \frac{1}{2}N_3$. Montrer que $M^2 = I_3 + N_3$

En remarquant que $A = \Delta(I_3 + \Delta^{-1}N)$, déterminer une matrice R telle que $R^2 = A$

Donner une décomposition de Dunford de R

Problème 2 (Fourier ATS 2022)

On considère la fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ x & \text{si } x \in [0, \pi[\end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi[$.

On note $S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ la série de Fourier de f .

2. (a) Calculer le coefficient a_0 .

(b) Calculer les coefficients a_n pour tout entier naturel non nul n .

(c) Calculer les coefficients b_n pour tout entier naturel non nul n .

(d) Montrer que la série de Fourier de f est convergente. Énoncer le théorème utilisé et préciser la fonction vers laquelle elle converge.

3. En évaluant la série de Fourier de f en un point particulier, montrer que $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

4. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

5. (a) Énoncer le théorème de Parseval.

(b) Donner la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.