

Contrôle 7

Le coin des définitions et des théorèmes

- d1. Qu'est-ce qu'un endomorphisme de \mathbb{R}^p ? d2. Comment définit-on le noyau de f lorsque f est linéaire ?
- d2'. Comment définit-on l'image de f lorsque f est linéaire ?
- d3. Qu'est-ce qu'une suite arithmétique ? (il y a deux définitions possibles)
- d4. Qu'est-ce qu'une fonction de classe C^1 ? d5. Qu'est-ce qu'un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^n ?
- d6. Comment note-t-on l'ensemble des combinaisons linéaires de \vec{u} ; \vec{v} et \vec{w} ?
- d7. Que signifie : « f est équivalent à g au voisinage de a » ? d8. idem avec « négligeable »
- d9. Quelles sont les formules de changement de base ? (Pour les matrices d'endomorphisme et pour les vecteurs)
- d10. Qu'est-ce qu'une valeur propre, qu'un vecteur propre ?

Les petits exos

1. Quel est l'ensemble de définition de $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t^2-1)^x} dt$?
2. Montrer que l'application $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) \longmapsto XP'(X) - 2P(X) \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$
Donner son noyau et son image. Dire si elle est injective, surjective, bijective.
Quelle est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$?
3. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{2\sin^2(x)+7\cos(x)-8} dx$

Problème 1

1. Faites l'étude complète de l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) = \frac{t}{t-2} \\ y(t) = \frac{8}{t^2-4} \end{cases}$ sans oublier les asymptotes pour les branches infinies et les tangentes ou pentes pour les points particuliers.

On placera de plus sur la représentation graphique les points correspondant aux paramètres $t = 3$ et $t = 4$.

2. Quelles sont les coordonnées du point correspondant au paramètre $t' = \frac{4}{t}$?

Calculer les coordonnées du milieu des points $M(t)$ et $M\left(\frac{4}{t}\right)$?

Qu'en déduit-on pour la représentation graphique ?

3. On souhaite calculer la longueur de l'arc compris entre les points de paramètre 3 et 4.

Quelle est l'intégrale que l'on doit alors calculer ? On ne demande pas d'effectuer le calcul.

4. On souhaite calculer l'aire sous la courbe pour t variant de 3 à 4.

Quelle intégrale doit-on alors calculer ?

5. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{16}{(t-2)^3(t+2)}$.

Indication : On pourra basculer de l'autre côté du symbole « = » le terme obtenu avec la méthode du cache correspondant à $\frac{c}{(t-2)^3}$. On peut alors simplifier par « $t - 2$ » et on recommence.

6. Quelles sont les primitives des fonctions suivantes : $\frac{1}{t-2}$; $\frac{1}{(t-2)^2}$; $\frac{1}{(t-2)^3}$; $\frac{1}{(t+2)}$?

7. En déduire la valeur de l'aire cherchée.

8. Former l'intégrale que l'on doit calculer pour obtenir l'aire sous la courbe entre les points $A(1;0)$ et $M(3)$.

Cette intégrale converge-t-elle ? Si oui, calculer sa valeur.

9. On fait tourner la partie de la courbe comprise entre $M(3)$ et $M(4)$ autour de l'axe des x .

On souhaite calculer le volume de l'entonnoir ainsi obtenu.

Quelle est l'intégrale que l'on doit alors calculer ? On ne demande pas d'effectuer le calcul.

Problème 2

Les deux parties de ce problème sont largement indépendantes.

Partie 1

Soient deux réels p et q . On considère la matrice N telle que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

11. Calculer le polynôme caractéristique $P_N(X)$ de la matrice N .

On rappelle qu'un polynôme $P(X)$ admet une racine double x_0 s'il existe un polynôme $Q(X)$ tel que : $P(X) = (X - x_0)^2 Q(X)$ avec $Q(x_0) \neq 0$.

12. Montrer que si x_0 est une racine double de $P(X)$, alors x_0 est aussi une racine du polynôme dérivé $P'(X)$.

On suppose désormais qu'il existe un réel a racine double du polynôme caractéristique $P_N(X)$.

13. Montrer que nécessairement, p et q doivent vérifier la relation (R) $4p^3 = 27q^2$.

14. Déterminer les plus petits entiers positifs p et q qui vérifient (R)

Partie 2

Dans cette partie, on prend $p = 3$ et $q = 2$. La matrice N est donc ici $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

21. Déterminer le polynôme caractéristique $P_N(X)$ de cette matrice

22. Déterminer les racines b_1 et b_2 du polynôme $P_N(X)$, b_1 étant la racine négative. Préciser leurs multiplicités.

23. Déterminer une base de E_1 , sous-espace propre de N associé à la valeur propre b_1 .

24. Déterminer une base de E_2 , sous-espace propre de N associé à la valeur propre b_2 .

25. La matrice N est-elle diagonalisable? (On précisera pourquoi)

26. On pose $M = N + I$ où I est la matrice de l'identité.

On appelle g l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé à M dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de \mathbb{R}^3 .

On appelle \vec{u} un vecteur de E_1 d'abscisse -2 et \vec{v} un vecteur de E_2 d'abscisse 1 . On pose $\vec{w} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$.

Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3 . Calculer $g(\vec{u})$; $g(\vec{v})$ et $g(\vec{w})$ dans \mathcal{B} puis dans \mathcal{B}' .

Indication : On pourra vérifier que $g(\vec{w}) = -2\vec{u} - \vec{v}$

27. Vérifier que la matrice de g dans la base \mathcal{B}' est $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

28. Résoudre le système d'équations différentielles suivant :
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2z'(t) \\ \dot{y}(t) = 3y'(t) - z'(t) \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

Indication : On commencera par résoudre la troisième équation.

28. En déduire les solutions du système d'équations différentielles suivant :
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + 2z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) + 3z(t) \\ \dot{z}(t) = y(t) + z(t) \end{cases}$$