

# Contrôle 7

## Le coin des définitions et des théorèmes

- d1. Qu'est-ce qu'un endomorphisme de  $\mathbb{R}^p$  ?      d2. Comment définit-on le noyau de  $f$  lorsque  $f$  est linéaire ?
- d2'. Comment définit-on l'image de  $f$  lorsque  $f$  est linéaire ?
- d3. Qu'est-ce qu'une suite arithmétique ? ( il y a deux définitions possibles )
- d4. Qu'est-ce qu'une fonction de classe  $C^1$  ?      d5. Qu'est-ce qu'un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  ?
- d6. Comment note-t-on l'ensemble des combinaisons linéaires de  $\vec{u}$  ;  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  ?
- d7. Que signifie : «  $f$  est équivalent à  $g$  au voisinage de  $a$  » ?      d8. idem avec « négligeable »
- d9. Quelles sont les formules de changement de base ? (Pour les matrices d'endomorphisme et pour les vecteurs)
- d10. Qu'est-ce qu'une valeur propre, qu'un vecteur propre ?

## Les petits exos

1. Quel est l'ensemble de définition de  $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t^2-1)^x} dt$  ?
2. Montrer que l'application  $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) \longmapsto XP'(X) - 2P(X) \end{array} \right.$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$   
Donner son noyau et son image. Dire si elle est injective, surjective, bijective.  
Quelle est la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$  ?
3. Calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{2\sin^2(x)+7\cos(x)-8} dx$

## Problème 1

1. Faites l'étude complète de l'arc paramétré  $\begin{cases} x(t) = \frac{t}{t-2} \\ y(t) = \frac{8}{t^2-4} \end{cases}$  sans oublier les asymptotes pour les branches infinies et les tangentes ou pentes pour les points particuliers.

On placera de plus sur la représentation graphique les points correspondant aux paramètres  $t = 3$  et  $t = 4$ .

2. Quelles sont les coordonnées du point correspondant au paramètre  $t' = \frac{4}{t}$  ?

Calculer les coordonnées du milieu des points  $M(t)$  et  $M\left(\frac{4}{t}\right)$  ?

Qu'en déduit-on pour la représentation graphique ?

3. On souhaite calculer la longueur de l'arc compris entre les points de paramètre 3 et 4.

Quelle est l'intégrale que l'on doit alors calculer ? On ne demande pas d'effectuer le calcul.

4. On souhaite calculer l'aire sous la courbe pour  $t$  variant de 3 à 4.

Quelle intégrale doit-on alors calculer ?

5. Décomposer en éléments simples la fraction  $\frac{16}{(t-2)^3(t+2)}$ .

Indication : On pourra basculer de l'autre côté du symbole « = » le terme obtenu avec la méthode du cache correspondant à  $\frac{c}{(t-2)^3}$ . On peut alors simplifier par «  $t - 2$  » et on recommence.

6. Quelles sont les primitives des fonctions suivantes :  $\frac{1}{t-2}$  ;  $\frac{1}{(t-2)^2}$  ;  $\frac{1}{(t-2)^3}$  ;  $\frac{1}{(t+2)}$  ?

7. En déduire la valeur de l'aire cherchée.

8. Former l'intégrale que l'on doit calculer pour obtenir l'aire sous la courbe entre les points  $A(1;0)$  et  $M(3)$ .

Cette intégrale converge-t-elle ? Si oui, calculer sa valeur.

9. On fait tourner la partie de la courbe comprise entre  $M(3)$  et  $M(4)$  autour de l'axe des  $x$ .

On souhaite calculer le volume de l'entonnoir ainsi obtenu.

Quelle est l'intégrale que l'on doit alors calculer ? On ne demande pas d'effectuer le calcul.

## Problème 2

Les deux parties de ce problème sont largement indépendantes.

### Partie 1

Soient deux réels  $p$  et  $q$ . On considère la matrice  $N$  telle que  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

11. Calculer le polynôme caractéristique  $P_N(X)$  de la matrice  $N$ .

On rappelle qu'un polynôme  $P(X)$  admet une racine double  $x_0$  s'il existe un polynôme  $Q(X)$  tel que :  $P(X) = (X - x_0)^2 Q(X)$  avec  $Q(x_0) \neq 0$ .

12. Montrer que si  $x_0$  est une racine double de  $P(X)$ , alors  $x_0$  est aussi une racine du polynôme dérivé  $P'(X)$ .

On suppose désormais qu'il existe un réel  $a$  racine double du polynôme caractéristique  $P_N(X)$ .

13. Montrer que nécessairement,  $p$  et  $q$  doivent vérifier la relation (R)  $4p^3 = 27q^2$ .

14. Déterminer les plus petits entiers positifs  $p$  et  $q$  qui vérifient (R)

### Partie 2

Dans cette partie, on prend  $p = 3$  et  $q = 2$ . La matrice  $N$  est donc ici  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

21. Déterminer le polynôme caractéristique  $P_N(X)$  de cette matrice

22. Déterminer les racines  $b_1$  et  $b_2$  du polynôme  $P_N(X)$ ,  $b_1$  étant la racine négative. Préciser leurs multiplicités.

23. Déterminer une base de  $E_1$ , sous-espace propre de  $N$  associé à la valeur propre  $b_1$ .

24. Déterminer une base de  $E_2$ , sous-espace propre de  $N$  associé à la valeur propre  $b_2$ .

25. La matrice  $N$  est-elle diagonalisable? (On précisera pourquoi)

26. On pose  $M = N + I$  où  $I$  est la matrice de l'identité.

On appelle  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  associé à  $M$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  de  $\mathbb{R}^3$ .

On appelle  $\vec{u}$  un vecteur de  $E_1$  d'abscisse  $-2$  et  $\vec{v}$  un vecteur de  $E_2$  d'abscisse  $1$ . On pose  $\vec{w} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ .

Montrer que  $\mathcal{B}' = (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Calculer  $g(\vec{u})$ ;  $g(\vec{v})$  et  $g(\vec{w})$  dans  $\mathcal{B}$  puis dans  $\mathcal{B}'$ .

Indication : On pourra vérifier que  $g(\vec{w}) = -2\vec{u} - \vec{v}$

27. Vérifier que la matrice de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est  $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

28. Résoudre le système d'équations différentielles suivant : 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2z'(t) \\ \dot{y}(t) = 3y'(t) - z'(t) \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

Indication : On commencera par résoudre la troisième équation.

28. En déduire les solutions du système d'équations différentielles suivant : 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + 2z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) + 3z(t) \\ \dot{z}(t) = y(t) + z(t) \end{cases}$$