

# Contrôle 6

## Exo 1.

Montrer que l'application suivante est linéaire.

$$f \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 3y, 2x + 6y, -x - 3y) \end{cases}$$

Donner son noyau et son image. Dire si elle est injective, surjective, bijective.

## Exo 2.

$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot k!}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n^2 \cdot n!}$ . Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

## Exo 3.

31. Factoriser le polynôme  $2X^4 + 162$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$

32. Quel est le reste de la division euclidienne de  $(X + 1)^{2n} + (X - 1)^{2n} + 1$  par  $X - 1$ ? par  $(X - 1)^2$ ?

## Exo 4 :

Trouver l'orthocentre du triangle de sommets A(1,2), B(-1,-1) et C(4,1)

## Exo 5 :

Réduire en éléments simples la fraction  $\frac{2X^4+1}{(X-1)^2(X^2+1)}$ .

## Problème 1

On souhaite calculer  $A^n$  lorsque  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

0. Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .

On voit bien qu'on ne voit pas de formule. :)

Il va falloir trouver un autre moyen. C'est l'objectif du problème qui suit :

a et b sont des réels strictement positifs.  $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On appelle  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $K = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

1. On pose  $\vec{u} = (\sqrt{a}; 0; -\sqrt{b})$ . Montrer que  $f(\vec{u}) = -\sqrt{ab}\vec{u}$ .

Indication : On calculera le produit  $K \begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ 0 \\ -\sqrt{b} \end{pmatrix}$ .

2. Trouver un vecteur  $\vec{v} = (x; y; z)$  tel que  $K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$  dont la deuxième composante vaut 1.

Que peut-on dire de  $\vec{v}$  ?

3. Trouver un vecteur  $\vec{w} = (x; y; z)$  tel que  $f(\vec{w}) = \sqrt{ab}\vec{w}$  dont la première composante vaut  $\sqrt{a}$ .

4. Montrer que  $\mathcal{B}' = (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

5. Quelle est la matrice de passage  $P$  de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  ? ( On commence par donner la définition )

6. Quelle est la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  ?

Indication : On commence par donner la définition, puis on l'applique en utilisant les questions 1 ; 2 et 3.

Ainsi, il est inutile de calculer à ce stade l'inverse de la matrice de passage.

7. Montrer que si  $f(\vec{a}) = \lambda\vec{a}$ , alors  $(\alpha f + \beta \text{Id}_{\mathbb{R}^3})(\vec{a}) = (\alpha\lambda + \beta)\vec{a}$

8.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Trouver  $a$ ;  $b$ ;  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $A = \alpha K + \beta I_3$ .

En déduire que la matrice  $A$  est diagonalisable.

Indication : On utilise la base  $\mathcal{B}'$  et la question 7.

9. On pose  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $Q^{-1}$ .

10. Montrer que la matrice  $\Delta = Q^{-1}AQ$  vaut  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Que vaut  $\Delta^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  ?

11. Montrer par récurrence que pour tout entier  $n$  strictement positif,  $A^n = Q\Delta^n Q^{-1}$ .

Conclure en donnant la valeur de  $A^n$ .

## Problème 2

On considère la suite de nombres réels  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_0 = -1 ; u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n .$$

On souhaite trouver la valeur de  $u_n$  ainsi que celle de la somme partielle  $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  .

Première méthode : Maurice ne connaît pas la méthode utilisant le polynôme caractéristique associé à la suite, mais aime bien les bidouilles. Dans un premier temps, on va faire comme lui.

1. Calculer  $u_2$  et en déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$  .

21. Calculer  $v_0$  .

22. Exprimer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$  . ( On montrera que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  )

23. En déduire l'expression de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en fonction de  $n$ .

3. On définit la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant, pour tout entier naturel  $n$  :  $w_n = \frac{u_n}{v_n}$  .

31. Calculer  $w_0$  et justifier que  $w_n$  est bien définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

32. Exprimer  $w_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  et de  $v_n$  ( on pourra utiliser l'égalité  $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$  )

( on montrera en particulier que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison 2 )

33. En déduire l'expression de  $w_n$  en fonction de  $n$ .

4. En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$  .

5. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$ .

Deuxième méthode : On utilise le polynôme caractéristique  $P(X) = X^2 - X + \frac{1}{4}$  associé à la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  .

51. Calculer ses racines.

52. Appliquer le théorème en question pour trouver toutes les suites vérifiant l'équation  $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$  .

53. Trouver la suite qui nous intéresse ici, c'est à dire telle que  $u_0 = -1$  et  $u_1 = \frac{1}{2}$  .