

Petits exos

Exo 1. EQUIVALENTS

Donner un équivalent simple en $t = 0$ et en $+\infty$ de $\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$.

Donner un équivalent simple quand $x \rightarrow +\infty$ de $\frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x}}$.

Exo 2. TAYLOR

Donner la formule de Taylor à l'ordre 2 en x_0 pour une fonction f .

Donner l'équation de la tangente à f en x_0

Exo 3. CHANGEMENT DE VARIABLE ET IPP

Calculer $\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$ grâce au changement de variable $X = x^2 + 1$

En déduire la valeur de $I = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$ grâce à une intégration par partie

Indication : On écrira $I = \int x \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$ et on utilisera la première question

Exo 4. APPLICATION LINEAIRE

Montrer que $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (x + y, x - y, x + 2y) \end{array} \right.$ est une application linéaire.

Donner son noyau et son image. Donner une équation cartésienne de $\text{Im}(f)$

Dire si f est injective, surjective, bijective.

Exo 5. LEIBNITZ ET RECURRENCE

Démontrer par récurrence que la dérivée nième de $h(x) = (2x - 1)e^x$ est $h^{(n)}(x) = (2x + 2n - 1)e^x$.

Citer la formule de Leibnitz.

Retrouver le résultat précédent grâce à cette formule.

Exo 6 : GEOMETRIE DANS \mathbb{R}^2

Trouver l'orthocentre du triangle de sommets A(1,2), B(-1,-1) et C(4,1)

Exo 7 : LINEARISATION

Linéariser $\sin^3(x)\cos(x)$.

Exo 8 : SYSTEME LINEAIRE

Résoudre le système suivant où a est un paramètre et où les inconnues sont x ; y et z .

$$\begin{cases} x + y + az = a \\ x + ay - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Problème 1

On va faire l'étude complète de la paramétrée $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{t-1} \\ y(t) = \frac{e^t}{t-1} \end{cases}$

1. Quand t tend vers 1, chercher l'asymptote oblique ainsi que la position de la courbe par rapport à l'asymptote. Pour trouver le b , on fera le changement $T = t - 1$ et on utilisera les développements limités.

2. Calculer x' et y' . Trouver les zéros de x' et y' .

3. Quelles sont les coordonnées du point $M(0)$ correspondant au paramètre $t = 0$?

Donner un vecteur tangent à $M(0)$.

4. En $t = 2$, il y a un point singulier. Donner les coordonnées de $M(2)$ ainsi que la pente en ce point.

5. Que se passe-t-il quand $t \rightarrow -\infty$?

6. Que se passe-t-il quand $t \rightarrow +\infty$?

7. Donner le tableau de variation conjoint pour x et y .

8. Donner la représentation graphique de cette courbe. (on donne $e \simeq 2,7$)

On aura pris soin de dessiner les diverses asymptotes ainsi que les tangentes aux points particuliers.

Problème 2 : Géométrie dans \mathbb{R}^3

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points $A(0;4;1)$, $B(1;3;0)$, $C(2;-1;-2)$ et $D(7;-1;4)$.

1. Montrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$.
21. Montrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
22. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
23. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
24. Déterminer les coord du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Donner une équation du plan P_1 passant par le point $E(2;3;-5)$ et admettant le vecteur $\vec{v}(1;1;1)$ comme vecteur normal.
4. Donner des équations paramétriques du plan P_2 de vecteurs directeurs $\vec{a}(4; -1; 0)$ et $\vec{b}(0; 0; 1)$ et passant par le point $F(2;-1;3)$
5. En déduire une équation cartésienne du plan P_2 .
Quelle est la distance du point A au plan P_2 ?
6. Quelle est l'équation de la sphère (S) de centre A de rayon 2?
Cette sphère est-elle tangente au plan P_2 ?
7. Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.
8. Vérifier que la droite d, intersection des plans P_1 et P_2 a pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}$$
où $t \in \mathbb{R}$
9. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles?