

PROBLEME 1

Exercice 3 du concours ATS 2022

On rappelle que la fonction tangente, notée \tan , réalise une bijection strictement croissante de $]-\pi/2, \pi/2[$ vers \mathbb{R} . Sa fonction réciproque, notée \arctan , est donc une bijection strictement croissante de \mathbb{R} vers $]-\pi/2, \pi/2[$. Elle est de plus impaire, dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante. La première question de la partie C nécessite le résultat de la question 2 de la partie B. Les questions 2 à 8 de la partie C peuvent être traitées de manière indépendante des parties A et B.

Partie A – Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)} \quad (\text{E})$$

d'inconnue une fonction réelle y définie sur \mathbb{R}^{+*} . On note (H) l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 0 \quad (\text{H})$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur \mathbb{R}^{+*} .
2. Déterminer une fonction λ dérivable sur \mathbb{R}^{+*} telle que la fonction $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$ soit solution particulière de l'équation différentielle (E) sur \mathbb{R}^{+*} .
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur \mathbb{R}^{+*} .

Partie B – Étude d'une fonction

On considère la fonction $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$$

1. (a) Donner le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
(b) En déduire le développement limité de \arctan au voisinage de 0 à l'ordre 3, puis celui de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Préciser par quelle valeur elle peut être prolongée.

Dans la suite on continuera à noter f la fonction ainsi prolongée de sorte que f est désormais définie sur \mathbb{R} .

3. Montrer que la fonction f est dérivable en 0. Préciser $f'(0)$ et la position du graphe de la fonction f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.
4. Étudier les variations de la fonction $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $p(x) = x - (1+x^2)\arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donner le signe de $p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Démontrer que pour tout réel x de \mathbb{R}^* , on a $f'(x) = \frac{p(x)}{x^2(1+x^2)}$ puis prouver que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
6. Dresser le tableau de variation de la fonction f . On y fera apparaître ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Partie C – Calcul approché d'une intégrale

Dans cette partie on étudie l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t} dt$$

dont on cherche à donner une approximation. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on définit

$$r_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)^2}$$

1. Pourquoi l'intégrale I est-elle bien définie? *Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 2 de la partie B.*
2. Établir pour tout réel $x \in [0, 1]$ la majoration

$$|r_n(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

3. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel t de $[0, 1]$, on a

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} = \frac{1 - (-1)^n t^{2n}}{1 + t^2}.$$

En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel x de $[0, 1]$ l'égalité suivante :

$$x s'_n(x) = \arctan(x) - r_n(x).$$

4. Écrire le nombre $s_n(1) - I$ à l'aide d'une intégrale puis montrer que

$$|s_n(1) - I| \leq \int_0^1 \left| \frac{r_n(t)}{t} \right| dt \leq \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(1)$.

5. Déterminer un entier naturel $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $s_N(1)$ soit une valeur approchée de I à 10^{-4} près.
6. Écrire une fonction nommée `s`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel non nul n et renvoie le nombre $s_n(1)$.
7. Écrire une fonction nommée `trouve_N`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un réel strictement positif ε et renvoie le plus petit entier N tel que $\frac{1}{(2N+1)^2} \leq \varepsilon$.
8. En utilisant les fonctions `s` et `trouve_N`, écrire en *Scilab* ou bien en pseudo-code les instructions calculant et affichant une valeur approchée de l'intégrale I à 10^{-10} près.

PROBLÈME 2

concours ATS 2013

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère la courbe C de représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases} \text{ avec } t \in]-\pi, \pi]. \text{ On note } M(t) \text{ le point de la courbe } C \text{ associé au paramètre } t.$$

1. Soit $M(t)$ un point de C . Préciser par quelle transformation géométrique on obtient à partir de $M(t)$ les trois points suivants : a) $M(-t)$; b) $M(\pi - t)$ c) $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

En déduire l'intervalle le plus petit possible $I = [0, \alpha]$ tel que si C_0 est la restriction de C obtenue pour $t \in I$, on peut obtenir tout C par des transformations géométriques successives (dont on précisera la nature et l'ordre) appliquées à C_0 .

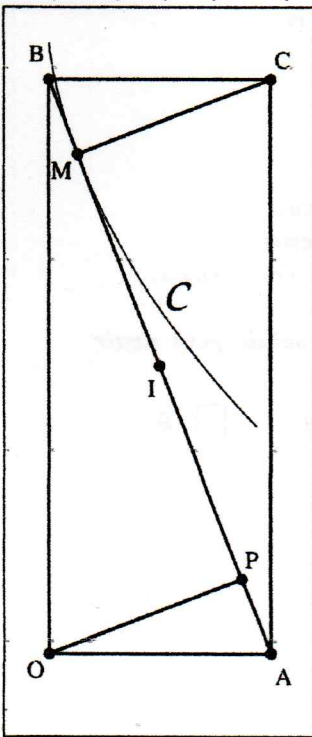
2. Faire un tableau de variation conjoint de $(x(t), y(t))$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. En déduire la représentation graphique de C_0 , puis de C que l'on donnera sur la copie.

3. Montrer que le vecteur \vec{t} de composantes $(-\cos(t), \sin(t))$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe C au point $M(t)$. Donner les composantes d'un vecteur \vec{n} orthogonal à \vec{t} .

En déduire qu'une équation de la tangente T au point $M(t)$ de la courbe C est

$$X \sin(t) + Y \cos(t) = \sin(t) \cos(t).$$

4. Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donner les coordonnées $A(t)$ du point d'intersection de T avec l'axe $(x'x)$ et de $B(t)$ point d'intersection de T avec l'axe $(y'y)$. [On posera $A(0) = (1, 0)$, $B(0) = (0, 0)$, $A(\pi/2) = (0, 0)$, $B(\pi/2) = (0, 1)$]. Que peut-on dire de la distance AB ?



5. Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, avec $A = A(t)$, $B = B(t)$ soit $C = C(t)$ tel que $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$. [(O,A,C,B) est un rectangle].

Montrer que la projection orthogonale de C sur (AB) est $M(t)$.

6. Montrer que la projection orthogonale de l'origine O sur (AB) est $P = P(t) = (\cos(t)\sin^2(t), \cos^2(t)\sin(t))$, et que le milieu I de [M,P] est le centre du rectangle (O,A,C,B).

7. On se propose de représenter graphiquement la courbe Q de représentation paramétrique: $\begin{cases} X(t) = \cos(t)\sin^2(t) \\ Y(t) = \cos^2(t)\sin(t) \end{cases}$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Donner les coordonnées de $P(0)$, $P(\pi/4)$, $P(\pi/2)$ ainsi que la direction des vecteurs tangents à Q en ces points.

8. Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, montrer que l'angle $\widehat{OA, OP}(t)$ a pour mesure $\theta = \frac{\pi}{2} - t$.

9. Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, calculer la longueur $OP(t)$ en fonction de θ . En déduire l'équation de Q_0 (Q restreinte à $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) en coordonnées polaires.

10. En déduire la représentation graphique de Q_0 que l'on donnera sur la copie.

On représentera Q en utilisant en les justifiant les mêmes transformations géométriques qu'au 1.